KOMMUTATIVE ALGEBRA, SS 2018. NOTIZEN ZUR VORLESUNG.

ULRICH GÖRTZ

Einführung

Die *Kommutative Algebra* behandelt die Theorie der kommutativen Ringe und von Moduln über solchen Ringen. Der Begriff des Moduls über einem Ring ist die natürliche Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums über einem Körper. Zwei wichtige Beispielklassen kommutativer Ringe sind

Polynomringe über einem (algebraisch abgeschlossenen Körper) und ihre Quotienten nach Idealen. Ist k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper und $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq R = k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, so reflektiert der Ring R/I viele geometrische Eigenschaften der gemeinsamen Nullstellenmenge

$$V(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n; \forall i:\ f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq k^n$$

der Polynome f_i (siehe Korollar 3.24, Korollar 3.25). Wegen der Möglichkeit, geometrische Eigenschaften in algebraische Eigenschaften eines Rings zu übersetzen, ist die Kommutative Algebra ein essenzielles Hilfsmittel der modernen algebraischen Geometrie.

Ganzheitsringe algebraischer Zahlkörper. Sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung, und sei

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K;\ \mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(x) \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Der Ring $\mathcal{O}_K$ heißt der *Ring der ganzen Zahlen* von K. Er reflektiert wesentliche zahlentheoretische Eigenschaften des Körpers K. Dies wird in der Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie* genauer untersucht.

Im Sinne der Übersetzung von algebraischen zu geometrischen Fragen (und umgekehrt), werden wir für jeden Ring R die Menge $\operatorname{Spec} R$ aller Primideale von R zu einem "geometrischen Objekt" zu machen (einem topologischen Raum), siehe Abschnitt 1.1. In der algebraischen Geometrie wird diese Sichtweise dann noch wesentlich ausgebaut. Die so verfügbare geometrische Intuition kann dann auch auf Situationen angewendet werden, die von zahlentheoretischen Fragen herkommen, etwa von Ringen der Form $\mathcal{O}_K$.

Literatur zur Kommutativen Algebra. Es gibt eine Reihe von sehr guten Büchern zur Kommutativen Algebra:

Atiyah, Macdonald [AM]. Einer der "Klassiker", der praktisch alle Ergebnisse der Vorlesung, und einiges darüberhinaus enthält. Ein großer Teil der Vorlesung lässt sich in diesem Buch direkt "wiederfinden". Im Abschnitt über Dedekindringe gehen wir allerdings etwas anders vor.

Matsumura [M2]. Ein sehr umfangreiches Buch, das über den Stoff von [AM] deutlich herausgeht. Insgesamt knapper geschrieben als [AM]. Von Matsumura gibt es auch noch das ältere Buch [M1], das zwar einen großen Durchschnitt mit dem neueren Buch hat, aber auch einige Themen abhandelt, die sich in letzterem nicht finden.

Bourbaki [B]. Die "Enzyklopädie" zur Kommutativen Algebra. Sehr umfangreich und ausführlich geschrieben, wegen der vielen Rückverweise ist es aber vielleicht nicht ganz leicht, sich dort auf Anhieb zurecht zu finden.

Eisenbud [E]. Ein relativ neues Buch zur kommutativen Algebra, das an vielen Stellen an die algebraische Geometrie anknüpft.

Zariski, Samuel [ZS]. Ein weiterer Klassiker, der aber insgesamt ein bisschen in die Jahre gekommen ist.

1. Ringe und Moduln

1.1. **Ringe und Ideale.** [AM] Ch. 1, [M2] §1

Definition 1.1. Eine Menge R zusammen mit Verknüpfungen $+\colon R\times R \to R$ (Addition) und $\cdot\colon R\times R\to R$ (Multiplikation) heißt kommutativer Ring mit 1, falls gilt:

(1) $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe. (Wir bezeichnen das neutrale Element bezüglich $+$ stets mit 0.)
(2) Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ, besitzt ein neutrales Element (das wir stets mit 1 bezeichnen), verhält sich distributiv bezüglich $+$ und ist kommutativ.

Sofern nicht ausdrücklich etwas Anderes gesagt wird, verstehen wir in diesem gesamten Skript unter einem Ring stets einen kommutativen Ring mit 1.

Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen: Der Multiplikationspunkt wird üblicherweise ausgelassen. Das Inverse von $a\in R$ bezüglich der Addition wird mit $-a$ bezeichnet, wir schreiben $a-b$ statt $a+(-b)$.

Beispiel 1.2. Die Menge $R=\{0\}$ mit $0+0=0$, $0\cdot 0=0$, ist ein Ring, der sogenannte *Nullring*. Dies ist der einzige Ring, in dem $1=0$ gilt. Wir schreiben einfach $R=0$.

Definition 1.3. Sei R ein Ring.

(1) Ein Element $a\in R$ heißt *Einheit*, falls ein Element $b\in R$ existiert mit $ab=1$. Die Menge $R^\times$ aller Einheiten in R bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, die sogenannte *Einheitengruppe*.
(2) Ein Element $a\in R$ heißt *Nullteiler*, falls ein Element $b\in R$, $b\neq 0$, existiert mit $ab=0$. Ist $R\neq 0$ und hat R keine Nullteiler außer 0, so heißt R *Integritätsring*.
(3) Ein Element $a\in R$ heißt *nilpotent*, wenn $n\geq 1$ existiert mit $a^n=0$. Sind $u\in R^\times$ und $a\in R$ nilpotent, so ist $u+a\in R^\times$ ("geometrische Reihe").

Definition 1.4. Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, wenn gilt:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in R$,
(2) $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in R$,
(3) $f(1) = 1$.

Die Menge aller Ringhomomorphismen von R nach S bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(R, S)$.

Definition 1.5. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ eines Ringes R heißt *Unterring*, falls $0, 1 \in S$ und S abgeschlossen bezüglich $+$, $-$ und $\cdot$ ist.

Definition 1.6. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ heißt *Ideal*, wenn I eine Untergruppe bezüglich der Addition ist, und wenn für alle $x \in R$, $y \in I$ gilt, dass $xy \in I$.

Bemerkung 1.7. (1) In jedem Ring R sind $\{0\}$ (das *Nullideal*) und R (das *Einsideal*) Ideale.
(2) Der Durchschnitt von Idealen ist ein Ideal.
(3) Sind R ein Ring und ist $X \subseteq R$ eine Teilmenge, so ist

$$(X) := \bigcap_{I \subseteq R \text{ Ideal}, X \subseteq I} I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\ n \geq 0, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

das kleinste Ideal von R, das X enthält. Wir nennen (X) das von X erzeugte Ideal. Ist $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreiben wir $(x_1, \dots, x_n) := (X)$. Beispiel: $(0) = \{0\}$, $(1) = R$. Ein Ideal I heißt *endlich erzeugt*, wenn endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in I$ existieren mit $I = (x_1, \dots, x_n)$. Ein Ideal I heißt *Hauptideal*, wenn ein Element $x \in I$ existiert mit $I = (x)$. Ein Integritätsring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt *Hauptidealring*.
(4) Sei R ein Ring. Sind $I_\nu \subseteq R$ Ideale, so heißt das von $\bigcup_\nu I_\nu$ erzeugte Ideal die *Summe* der Ideale I_ν, in Zeichen $\sum_\nu I_\nu$. Es gilt

$$\sum_\nu I_\nu = \left\{ \sum_\nu x_\nu;\ x_\nu \in I_\nu, \text{nur endlich viele} x_\nu \text{ ungleich} 0 \right\}.$$

Definition 1.8. Seien R ein Ring und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale von R. Dann heißt

$$\mathfrak{ab} = (ab;\ a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}) = \left\{ \sum_i a_i b_i;\ a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

das *Produkt* der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Lemma 1.9. *Sei $f\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist der* Kern $\mathrm{Ker}\, f := f^{-1}(0)$ *von f ein Ideal von R und das* Bild $\mathrm{Im}\, f = f(R)$ *von f ein Unterring von R'.*

Definition 1.10. Eine R-Algebra ist ein (Ring A zusammen mit einem) Ringhomomorphismus $R \to A$ (dieser Homomorphismus heißt auch der

Strukturmorphismus. Ein Homomorphismus zwischen R-Algebren $\varphi\colon R \to A$, $\psi\colon R \to B$ ist ein Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$, so dass $f \circ \varphi = \psi$. Die Menge aller R-Algebren-Homomorphismen von A nach B bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_R(A, B)$.

Quotient nach einem Ideal. —
Definition des Quotientenbegriffs durch die universelle Eigenschaft.

Definition 1.11. Seien R ein Ring und I ein Ideal. Eine R-Algebra $\pi\colon R \to \overline{R}$ heißt *Quotient von R nach I*, wenn für alle R-Algebren S die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(\overline{R}, S) \longrightarrow \{f \in \mathrm{Hom}(R, S);\ \mathrm{Ker}(f) \supseteq I\}, \quad \psi \mapsto \psi \circ \pi,$$

eine Bijektion ist.

Bemerkung 1.12.
(1) Ist $\pi\colon R \to \overline{R}$ ein Quotient, so gilt $\mathrm{Ker}(\pi) \supseteq I$ (betrachte $S := \overline{R}$ und $\psi = \mathrm{id}$).
(2) Im allgemeinen kann die obige Bedingung wie folgt ausformuliert werden: Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Der Homomorphismus f faktorisiert genau dann über π (d.h., lässt sich schreiben in der Form $f = \psi \circ \pi$ für ein $\psi\colon \overline{R} \to S$), wenn $\mathrm{Ker}(f) \supseteq I$. In diesem Fall ist ψ eindeutig bestimmt.
   Das bedeutet: Der "wie üblich" konstruierte Quotient R/I (siehe unten) ist ein Quotient im Sinne der obigen Definition — dies ist gerade der Homomorphiesatz.
(3) Die "universelle Eigenschaft", das heißt die Kenntnis der Mengen $\mathrm{Hom}_R(\overline{R}, S)$ für alle S, zieht nach sich, dass ein Quotient eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus.
(4) Aus der obigen Definition geht nicht hervor, ob ein Quotient in diesem Sinne überhaupt immer existiert. Man kann mit dieser abstrakteren Definition also nicht darum herumkommen, die Konstruktion des Quotienten durchzuführen.

Konstruktion des Quotienten.
Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Die Relation

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathfrak{a}$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf R, deren Äquivalenzklassen wir als die Nebenklassen von $\mathfrak{a}$ in R bezeichnen. Die Äquivalenzklasse von $x \in R$ ist

$$\overline{x} := x + \mathfrak{a} := \{x + a;\ a \in \mathfrak{a}\}.$$

Die Menge $R/\mathfrak{a}$ der Äquivalenzklassen wird durch die (wohldefinierten!) Verknüpfungen

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}, \qquad \text{und } \overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy}$$

zu einem kommutativen Ring, und die Abbildung $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$, $x \mapsto \overline{x}$, die als die *kanonische Projektion* bezeichnet wird, ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Satz 1.13 (Homomorphiesatz/Universelle Eigenschaft des Quotienten)**.** *Seien R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion.*

(1) *Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to R'$ faktorisiert genau dann über π (d.h. es existiert $\psi\colon R/\mathfrak{a} \to R'$ mit $\psi \circ \pi = \varphi$), wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Der Homomorphismus ψ ist dann eindeutig bestimmt. (Wie oben bemerkt, besagt dieser Teil genau, dass $\pi\colon R \to R/I$ ein Quotient im Sinne der obigen Definition ist.)*
(2) *In diesem Fall gilt $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$, und ψ ist genau dann injektiv, wenn $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$.*

Satz 1.14 (Ideale des Quotienten)**.** *Seien R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann sind die Abbildungen*

$$\mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b}) \qquad \textit{und } \mathfrak{c} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{c})$$

zueinander inverse, inklusionserhaltende Bijektionen zwischen der Menge aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten, und der Menge aller Ideale von $R/\mathfrak{a}$.

Einschub: Topologische Räume. Ein grundlegender Bestandteil unserer Vorstellung von "geometrischen Objekten" ist es, Aussagen darüber treffen zu können, ob zwei Punkte nahe beieinander liegen, oder nicht. Besonders direkt spiegelt sich das in einem *metrischen Raum* wider, d.h., einer Menge X zusammen mit einer *Metrik*, oder *Abstandsfunktion*, $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die symmetrisch ist ($d(x,y) = d(y,x)$), für die $d(x,y) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = y$, und die die Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{für alle } x, y \in X$$

erfüllt. Ein wichtiges Beispiel sind die Räume $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(x,y) := ||x-y||$, wobei $||-||$ die euklidische Norm bezeichnet:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Für unsere Zwecke ist dieser Begriff allerdings nicht geeignet, da auf den Räumen, die wir betrachten werden, eine geeignete Metrik nicht existiert. Ein schwächerer/allgemeinerer Begriff ist der des *topologischen Raumes*. Die Ausgangsüberlegung für dessen Definition besteht aus den folgenden beiden Punkten:

(1) Die Frage, ob eine Abbildung stetig ist, hängt eng mit der Ausgangsfrage zusammen, wann Punkte nahe beieinander liegen. (Denken Sie an das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit von Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.)
(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn für alle offenen[1] Teilmengen $V \subseteq R^m$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Um den Begriff der Stetigkeit zu definieren, müssen wir also nur wissen, welche Teilmengen offen sind. Genauere Informationen über die Metrik sind nicht erforderlich.

[1]Wir nennen $V \subseteq R^m$ *offen*, wenn für alle $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass der offene Ball um x mit Radius ε ganz in V liegt.

Definition 1.15. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(2) Ist I eine Menge und sind $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.
(3) Ist I eine endliche Menge und sind $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, so gilt $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen*, wenn $U \in \mathcal{O}$.

Die Familie $\mathcal{O}$ wird auch als eine *Topologie auf* X bezeichnet. Ist X eine Menge und sind $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ Topologien auf X, so nennen wir $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}'$ (und dementsprechend $\mathcal{O}'$ gröber als $\mathcal{O}$), wenn $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. In der Regel sprechen wir einfach von dem topologischen Raum X und erwähnen die Familie $\mathcal{O}$ nicht eigens.

Definition 1.16. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus Z$ offen in X ist.

Definition 1.17. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Beispiel 1.18. (1) Sei X ein metrischer Raum, zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik. Mit der obigen Definition offener Mengen wird X zu einem topologischen Raum. Die stetigen Abbildungen metrischer Räume im "üblichen" Sinne sind dann genau die stetigen Abbildungen im Sinne der vorherigen Definition.
(2) Sei X eine Menge. Die *diskrete Topologie* ist die Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind.
(3) Sei X eine Menge. Die *chaotische Topologie* (oder *Klumpentopologie*) ist die Topologie, in der $\emptyset$ und X die einzigen offenen Teilmengen von X sind.

Definition 1.19. (1) Ein topologischer Raum X heißt *quasi-kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn für jede Familie U_i, $i \in I$, von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt: Es gibt eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i\in I'} U_i$.
(2) Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffsch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch. Eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 1.20. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die *Teilraumtopologie* auf Y (oder auch die *induzierte Topologie*) ist die Topologie für die die offenen Mengen in Y genau die Mengen der Form $U \cap Y$ mit $U \subseteq X$ offen sind.

Primideale und maximale Ideale.

Definition 1.21. Sei R ein Ring.

(1) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt *Primideal*, falls $\mathfrak{p} \neq R$ und für alle $x, y \in R$ mit $xy \in \mathfrak{p}$ gilt: $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$.
(2) Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ heißt *maximales Ideal*, falls $\mathfrak{m} \neq R$, und für alle Ideale $\mathfrak{m}' \neq R$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$ gilt: $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Satz 1.22. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.*

(1) *Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein Integritätsring ist.*
(2) *Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein Körper ist.*

Insbesondere gilt: Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

Satz 1.23. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, $\mathfrak{a} \neq R$. Dann besitzt R ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Insbesondere besitzt jeder Ring $R \neq 0$ ein maximales Ideal.*

Satz 1.24. *Die Bijektionen in Satz 1.14 erhalten die Eigenschaften* Primideal *und* maximales Ideal.

Das Primspektrum eines Rings. Sei R ein Ring. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Spec} R$ die Menge der Primideale in R und nennen $\operatorname{Spec} R$ das *Spektrum* oder *Primspektrum* von R. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Spm} R$ die Menge aller maximalen Ideale von R und nennen $\operatorname{Spm} R$ das *Maximalspektrum* von R. Offenbar ist $\operatorname{Spm} R \subseteq \operatorname{Spec} R$.

Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so setzen wir

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R;\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Lemma 1.25. *Sei R ein Ring.*

(1) $V((0)) = \operatorname{Spec} R$, $V((1)) = \emptyset$.
(2) *Sind $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, Ideale von R, so gilt*

$$\bigcap_i V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_i \mathfrak{a}_i).$$

(3) *Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale von R, so gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Satz 1.26. *Die Mengen $V(\mathfrak{a})$ für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq R$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf* $\operatorname{Spec} R$*, der sogenannten* Zariski-Topologie.

Satz 1.27. *Sei $\varphi\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist*

$$\varphi^a\colon \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R, \qquad \mathfrak{p}' \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}'),$$

eine stetige Abbildung.

Bemerkung 1.28. Die offenen Teilmengen der Form $D(f) := \operatorname{Spec} R \setminus V(f)$ heißen *ausgezeichnete offene Teilmengen.* Sie bilden eine Basis der Topologie, d.h. dass jede offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ eine Vereinigung von Teilmengen dieser Form ist. Außerdem sind endliche Durchschnitte von ausgezeichneten offenen Teilmengen wieder ausgezeichnete offene Teilmengen sind. Es gilt nämlich

$$\operatorname{Spec} R \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \qquad \text{und} \quad D(f) \cap D(g) = D(fg).$$

1.2. **Lokale Ringe, Lokalisierung.** [AM] Ch. 3, [M2] §4

Definition 1.29. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *multiplikative Teilmenge* (oder *multiplikatives System*), falls $1 \in S$ und für $s, s' \in S$ stets $ss' \in S$ gilt.

Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Die auf der Menge $R \times S$ durch

$$(r, s) \sim (r', s') \iff \exists t \in S\colon t(rs' - r's) = 0$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r, s) mit $\frac{r}{s}$, und die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}R$.

Mit den (wohldefinierten!) Verknüpfungen

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'} \qquad \text{und } \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

wird $S^{-1}R$ zu einem kommutativen Ring mit Nullelement $\frac{0}{1}$ und Einselement $\frac{1}{1}$. Die Abbildung $\tau\colon R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus, und es gilt $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$. *Achtung: Im allgemeinen ist die Abbildung τ nicht injektiv!*

Der Ring $S^{-1}R$ zusammen mit dem Homomorphismus τ heißt die *Lokalisierung von R nach S.*

Satz 1.30 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung)**.** *Mit den obigen Notationen gilt: Ist $\varphi\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, so faktorisiert φ über $\tau\colon R \to S^{-1}R$ genau dann, wenn $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$. In diesem Fall ist die Abbildung $\psi\colon S^{-1}R \to R'$ mit $\varphi = \psi \circ \tau$ eindeutig bestimmt.*

Ist R ein Integritätsring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so gilt $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ genau dann, wenn $rs' = r's$. Für einen Integritätsring R erhält man für $S = R \setminus \{0\}$ als Lokalisierung $S^{-1}R$ einen Körper, den sogenannten *Quotientenkörper* $\operatorname{Quot}(R)$ von R.

Ist R ein Ring, $f \in R$, so ist $S := \{1, f, f^2, \dots\}$ eine multiplikative Teilmenge; in diesem Fall schreibt man $R_f := S^{-1}R$. Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $S := R \setminus p$ eine multiplikative Teilmenge; in diesem Fall schreibt man $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$.

Bemerkung 1.31. Sei R ein Ring, S eine multiplikative Teilmenge. Genau dann gilt $R = 0$, wenn $0 \in S$.

Satz 1.32. *Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Dann besteht eine Bijektion*

$$\operatorname{Spec} S^{-1}R \to \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R;\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}, \quad \mathfrak{q} \mapsto \tau^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Die Umkehrabbildung bildet $\mathfrak{p}$ ab auf das von $\tau(\mathfrak{p})$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal (das wir mit $\mathfrak{p}S^{-1}R$ bezeichnen).

Definition 1.33. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann heißt

$$\kappa(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$$

der *Restklassenkörper* von R in $\mathfrak{p}$.

Zu jedem $f \in R$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, bezeichnen wir mit $f(\mathfrak{p})$ das Bild von f in $\kappa(\mathfrak{p})$. In dieser Weise kann man die Elemente von f als Funktionen auf $\operatorname{Spec} R$ auffassen.

Definition 1.34. Ein Ring R heißt *lokaler Ring*, wenn R genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Wir bezeichnen dann den Körper $R/\mathfrak{m}$ als den Restklassenkörper von R. Wir schreiben: *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.* als Kurzform für: *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.* Wir schreiben: *Sei $(R, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring.* als Kurzform für: *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k.*

Satz 1.35. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:*

(1) *Der Ring R ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.*
(2) *Es gilt $R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times$.*
(3) *Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist maximal und für alle $x \in \mathfrak{m}$ ist $1 + x \in R^\times$.*

Beispiele für lokale Ringe sind Körper und die Ringe

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ p \not| \, b \right\}, \qquad p \ \text{ Primzahl.}$$

Allgemeiner sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring.

1.3. **Radikale.** [AM] Ch. 1, [M2] §1

Definition 1.36. Sei R ein Ring. Das Ideal

$$\operatorname{Jac}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R} \mathfrak{m}$$

heißt das *Jacobson-Radikal von R*.

Beispiel 1.37. (1) $\operatorname{Jac}(\mathbb{Z}) = 0$.
(2) Ist k ein Körper, so ist $\operatorname{Jac}(k[X]) = 0$.

Lemma 1.38. *Sei R ein Ring. Dann gilt*

$$\operatorname{Jac}(R) = \{x \in R;\ \forall y \in R : 1 + xy \in R^\times\}.$$

Definition 1.39. Sei R ein Ring. Das Ideal

$$\operatorname{Rad}(R) := \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$$

heißt das *(Nil-)Radikal von R.*

Definition 1.40. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $n \geq 0$ existiert mit $x^n = 0$. Der Ring R heißt *reduziert*, wenn R keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält.

Satz 1.41. *Sei R ein Ring. Dann gilt*

$$\operatorname{Rad}(R) = \{x \in R;\ x \ \ \textit{nilpotent}\}.$$

Satz 1.42. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Dann ist*

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \{x \in R;\ \exists n \geq 0 : x^n \in \mathfrak{a}\},$$

und dieses Ideal heißt das Radikal von $\mathfrak{a}$ *und wird mit $\sqrt{\mathfrak{a}}$ bezeichnet. Gilt $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, so nennt man $\mathfrak{a}$ auch* Radikalideal.

Ist R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so gilt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Genauer gilt:

Satz 1.43. *Sei R ein Ring. Die Abbildungen V, die einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ die Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} R$ zuordnet, und I, die einer Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec} R$ das Ideal $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} \mathfrak{p}$ zuordnet, haben die Eigenschaften*

$$V(I(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} \quad \textit{und} \quad I(V(Y)) = \overline{Y},$$

wobei $\overline{Y}$ den Abschluss von Y bezüglich der Zariski-Topologie bezeichnet.

Wir erhalten so zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\{\textit{Radikalideale in } R\} \longleftrightarrow \{\textit{abgeschlossene Teilmengen in } \operatorname{Spec} R\}.$$

Lemma 1.44. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, und seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R$ mit*

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Dann existiert ein i mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

Lemma 1.45. *Sei R ein Ring, seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq R$ Ideale, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Wenn*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subseteq p,$$

so gibt es ein i mit $\mathfrak{a}_i \subseteq p$. Gilt in der Voraussetzung sogar Gleichheit, so gilt sogar $\mathfrak{a}_i = p$.

1.4. **Moduln.** [AM] Ch. 2, 3, [M2] §2

Definition 1.46. Sei R ein Ring. Eine Menge M zusammen mit Verknüpfungen $+\colon M \times M \to M$, $\cdot\colon R \times M \times M$ heißt R-Modul, wenn gilt:

(1) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
(2) für alle $r, s \in R$, $m \in M$ gilt: $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$,
(3) für alle $r, s \in R$, $m, n \in M$ gilt: $(r + s)m = rm + sm$, $r(m + n) = rm + rn$,
(4) für alle $m \in M$ gilt: $1 \cdot m = m$.

Definition 1.47. Sei R ein Ring. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen R-Moduln M und N heißt *R-Modul-Homomorphismus*, falls gilt:

$$f(m + m') = f(m) + f(m'), \quad f(rm) = rf(m) \quad \text{für alle } m, m' \in M, r \in R.$$

Ein Isomorphismus zwischen R-Moduln ist ein Homomorphismus, der einen Umkehrhomomorphismus besitzt.

Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul nichts anderes als ein R-Vektorraum, und ein R-Modul-Homomorphismus nichts anderes als ein R-Vektorraum-Homomorphismus.

Wie im Vektorraumfall überprüft man leicht, dass jeder bijektive Homomorphismus ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 1.48. Sei R ein Ring. Ist A eine R-Algebra (via $\varphi\colon R \to A$), so ist A ein Ring, und trägt gleichzeitig eine R-Modulstruktur, so dass die Ringaddition und die Moduladdition übereinstimmen, und die Ringmultiplikation und die Skalarmultiplikation verträglich sind: $r(xy) = (rx)y = x(ry)$ für alle $r \in R$, $x, y \in A$: Wir definieren nämlich die Skalarmultiplikation durch $r \cdot x := \varphi(r)x$, wobei auf der rechten Seite die Ringmultiplikation in A verwendet wird.

Ist andererseits A ein Ring, der gleichzeitig ein R-Modul ist, so dass die obigen Verträglichkeiten gelten, so wird A durch $\varphi\colon R \to A$, $r \mapsto r \cdot 1$ zu einer R-Algebra.

Genauer sollte man die hier definierten Algebren als *assoziative kommutative Algebren mit Eins* bezeichnen. Andere Algebren kommen aber in diesem Skript nicht vor.

Definition 1.49. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *Untermodul*, falls $0 \in N$ und N abgeschlossen ist unter Addition und unter Skalarmultiplikation mit Elementen aus R.

Bemerkung 1.50. Weil $(-1)n = -n$ ist ein Untermodul stets abgeschlossen unter Bildung des additiven Inversen. Daher ist eine Teilmenge eines R-Moduls genau dann ein Untermodul, wenn sie mit den Einschränkungen von $+$ und $\cdot$ selbst ein R-Modul ist.

Ist R ein Ring, so ist R selbst in offensichtlicher Weise ein R-Modul. Die R-Untermoduln von R sind genau die Ideale von R. Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist "dasselbe" wie eine abelsche Gruppe; unter dieser Entsprechung entsprechen sich die Begriffe von Modulhomomorphismus und Gruppenhomomorphismus, und die Begriffe von Untermodul und Untergruppe.

Definition 1.51. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt *frei*, wenn er eine Basis besitzt, d.h. wenn eine Familie $(b_i)_i$ von Elementen aus M existiert, so dass sich jedes $m \in M$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der b_i mit Koeffizienten in R schreiben lässt.

Über einen Körper sind alle Moduln frei: Das ist gerade der Satz, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Andererseits ist zum Beispiel der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht frei.

Bemerkung 1.52. Sei R ein Ring.

(1) Die triviale abelsche Gruppe $\{0\}$ kann in eindeutiger Weise zu einem R-Modul gemacht werden, den wir auch mit 0 bezeichen. Dieser Modul heißt der Nullmodul. Der Ring R selbst ist in offensichtlicher Weise ein (freier) R-Modul.
(2) Sei M ein R-Modul. Der Durchschnitt von Untermoduln von M ist ein Untermodul.
(3) Sind R ein Ring, M ein R-Modul und ist $X \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist

$$\langle X \rangle_R := \bigcap_{N \subseteq M \text{ Untermodul}, X \subseteq N} N = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i;\ n \geq 0, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

der kleinste Untermodul von M, der X enthält. Wir nennen $\langle X \rangle_R$ den von X erzeugten Untermodul. Ist $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreiben wir $\langle x_1, \dots, x_n \rangle_R := \langle X \rangle_R$. Ein Untermodul N heißt *endlich erzeugt*, wenn endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in N$ existieren mit $N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.
(4) Sind $N_\nu \subseteq M$ Untermoduln, so heißt der von $\bigcup_\nu N_\nu$ erzeugte Untermodul die *Summe* der Untermoduln N_ν, in Zeichen $\sum_\nu N_\nu$.

Definition 1.53. Sei R ein Ring, $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Dann sind der *Kern* $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(0)$ und das *Bild* $\operatorname{Im} f := f(M)$ von f Untermoduln von M bzw. von N.

Definition 1.54. Sei R ein Ring. Sind M, N zwei R-Moduln, so ist die Menge $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ aller R-Modul-Homomorphismen von M nach N in natürlicher Weise ein R-Modul.

Definition 1.55. Sei R ein Ring, und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln.

(1) Das kartesische Produkt $\prod_i M_i$ ist mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein R-Modul, das *(direkte) Produkt* der M_i. Das Produkt zusammen mit den Projektionen $\pi_j \colon \prod_i M_i \to M_j$

erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für alle R-Moduln T ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(T, \prod_i M_i) \to \prod_i \mathrm{Hom}_R(T, M_i), \quad f \mapsto (\pi_i \circ f)_i,$$

eine Bijektion.

(2) Die Teilmenge

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_i \in \prod_i M_i;\ m_i = 0 \ \text{ für alle bis auf endlich viele } i\}$$

ist ein Untermodul von $\prod_i M_i$ und heißt die *direkte Summe* der M_i. Die direkte Summe zusammen mit den Inklusionen $\iota_j\colon M_j \to \bigoplus_i M_i$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für alle R-Moduln T ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus M_i, T) \to \prod_i \mathrm{Hom}_R(M_i, T), \quad f \mapsto (f \circ \iota_i)_i,$$

eine Bijektion.

(3) Ist speziell $M_i = M$ für alle i, so schreiben wir auch $M^I := \prod_i M$, $M^{(I)} := \bigoplus_i M$. Ist $I = \{1, \dots n\}$, so schreiben wir $R^n := R^I$.

Ist die Indexmenge I in der Definition endlich, so stimmen direktes Produkt und direkte Summe überein.

Lemma 1.56. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Der R-Modul M ist genau dann frei, wenn eine Menge I existiert, so dass $M \cong R^{(I)}$. Der R-Modul M ist genau dan endlich erzeugt, wenn eine endliche Menge I und ein surjektiver R-Modul-Homomorphismus $R^I \to M$ existieren.*

Direktes Produkt und direkte Summe lassen sich durch universelle Eigenschaften charakterisieren, es handelt sich gerade um das Produkt und das Koprodukt in der Kategorie der R-Moduln, siehe 2.3.

Quotient eines Moduls nach einem Untermodul. Ist R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die abelsche Gruppe M/N in natürlicher Weise ein R-Modul (mit $r(m + N) := (rm) + N$ als Skalarmultiplikation), und es gilt die offensichtliche Version des Homomorphiesatzes.

Lemma 1.57. *Ein R-Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn $n \geq 0$ und ein Untermodul $N \subseteq R^n$ existieren mit $M \cong R^n/N$.*

Lokalisierung von Moduln. Ist R ein Ring, M ein R-Modul und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so kann man analog zur Lokalisierung von Ringen einen $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$ aller Brüche $\frac{m}{s}$, $m \in M$, $s \in S$, konstruieren. Wie im Fall von Ringen gilt

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \quad \iff \quad \exists t \in S\colon t(ms' - m's) = 0.$$

In Analogie zu den Schreibweisen $R_\mathfrak{p}$, R_f schreiben wir auch $M_\mathfrak{p}$, M_f.

Das Lemma von Nakayama.

Definition 1.58. Sind R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul, so sei

$$\mathfrak{a} \cdot M := \langle am;\ a \in \mathfrak{a}, m \in M \rangle_R.$$

Dann induziert die R-Modul-Struktur auf $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise eine $R/\mathfrak{a}$-Modul-Struktur.

Satz 1.59 (Lemma von Nakayama)**.** *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(R)$ ein Ideal von R und sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann gilt $M = 0$.*

Korollar 1.60. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(R)$ ein Ideal von R und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $N + \mathfrak{a}M = M$, so gilt $N = M$.*

Korollar 1.61. *Sei $(R, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist $M/\mathfrak{m}M$ in natürlicher Weise ein (endlich erzeugter) Vektorraum über dem Restklassenkörper k von R. Sind $x_1, \dots, x_n \in M$ Elemente, deren Restklassen in $M/\mathfrak{m}M$ ein Erzeugendensystem dieses k-Vektorraums bilden, so ist $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M.*

Definition 1.62. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann heißt

$$M(\mathfrak{p}) := M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$$

die *Faser von M über* $\mathfrak{p}$. Dies ist ein Vektorraum über dem Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p})$.

Bemerkung 1.63. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ Primideale von R. Dann gilt $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M(\mathfrak{p}) \le \dim_{\kappa(\mathfrak{p}')} M(\mathfrak{p}')$.

Satz 1.64. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Betrachte die Eigenschaften*

(1) $M = 0$.
(2) *Für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ *gilt* $M_\mathfrak{p} = 0$.
(3) *Für alle* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ *gilt* $M_\mathfrak{m} = 0$.
(4) *Für alle* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ *gilt* $M(\mathfrak{m}) = 0$.

Dann sind (1), (2), (3) äquivalent und implizieren (4). Ist M endlich erzeugt über R, so sind alle vier Eigenschaften äquivalent.

1.5. **Tensorprodukte.** [AM] Ch. 2, [M2] App. A

Sei R ein Ring.

Definition 1.65. Seien M, N zwei R-Moduln. Ein R-Modul T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\varphi\colon M \times N \to T$ heißt *Tensorprodukt von M und N über R*, falls für jeden R-Modul P und jede bilineare Abbildung $f\colon M \times N \to P$ genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi\colon T \to P$ existiert, so dass $\psi \circ \varphi = f$.

Satz 1.66. *Seien M, N zwei R-Moduln. Dann existiert ein Tensorprodukt von M und N über R, und es ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Wir bezeichnen das Tensorprodukt von M und N über R mit $M \otimes_R N$, und das Bild von $(x, y) \in M \times N$ in $M \otimes_R N$ mit $x \otimes y$.

Beispiel 1.67. Ist K ein Körper und sind V, W zwei K-Vektorräume, so haben wir Identifizierungen

$$\mathrm{Hom}(V \otimes_K W, K) = \mathrm{Bil}(V \times W, K) = \mathrm{Hom}(V, W^\vee),$$

also ist $V \otimes_K W = \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee)^\vee$.

Speziell können wir $K^m \otimes_K K^n$ mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ identifizieren.

Bemerkung 1.68. Seien R ein Ring und seien M, N zwei R-Moduln.

(1) Jedes Element von $M \otimes_R N$ ist eine endliche Summe von Elementen der Form $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$.
(2) Seien $(x_i)_i$ ein Erzeugendensystem von M und $(y_i)_i$ ein Erzeugendensystem von N. Dann ist $(x_i \otimes y_i)_i$ ein Erzeugendensystem von $M \otimes_R N$.
(3) Wir haben kanonische Isomorphismen $R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$, $r \otimes m \mapsto rm$ und $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$, $m \otimes n \mapsto n \otimes n$.
(4) Das Tensorprodukt ist "funktoriell" im folgenden Sinne: Sind $\varphi\colon M \to M'$ und $\psi\colon N \to N'$ zwei R-Modulhomomorphismen, so erhalten wir einen R-Modul-Homomorphismus

$$\varphi \otimes \psi\colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N', \quad m \otimes n \mapsto m' \otimes n'.$$

Diese Konstruktion ist verträglich mit der Verkettung von Abbildungen.

Satz 1.69. *Seien M und N zwei R-Moduln, seien $x_i \in M$, $y_i \in N$ mit*

$$\sum_i x_i \otimes y_i = 0 \text{ in } M \otimes_R N.$$

Dann existieren endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$, $N_0 \subseteq N$, so dass $x_i \in M_0$, $y_i \in N_0$ für alle i und so dass

$$\sum_i x_i \otimes y_i = 0 \text{ in } M_0 \otimes_R N_0.$$

Bemerkung 1.70. Analog zum obigen Fall kann man für multilineare (anstelle von bilinearen) Abbildungen vorgehen. Man erhält dann Tensorprodukte $M_1 \otimes_R M_2 \otimes \cdots \otimes_R M_n$. Man hat natürliche Identifikationen

$$M \otimes N \otimes P = (M \otimes N) \otimes P = M \otimes (N \otimes P),$$

und entsprechend für mehr als 3 Faktoren.

Bemerkung 1.71. Seien A, B Ringe, sei M ein A-Modul, P ein B-Modul, und sei N ein (A, B)-Bimodul, d.h. es sei N ein A-Modul und gleichzeitig ein B-Modul, so dass $(ax)b = a(xb)$ für alle $a \in A$, $b \in B$, $x \in N$. Wir schreiben hier die Skalarmultiplikation mit Elementen von B als Multiplikation von rechts.

Dann ist $M \otimes_A N$ ein B-Modul ("von rechts"), und $N \otimes_B P$ ein A-Modul ("von links"), und

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P = M \otimes_A (N \otimes_B P), \quad m \otimes n \otimes p \mapsto m \otimes n \otimes p$$

ist ein Isomorphismus von (A, B)-Bimoduln, mit dem wir stets die beiden Seiten identifizieren.

Basiswechsel. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und M ein A-Modul. Dann wird der A-Modul $B \otimes_A M$ durch die (wohldefinierte!) Skalarmultiplikation

$$B \times (B \otimes_A M) \to B \otimes_A M, \quad (b, b' \otimes m) \mapsto (bb') \otimes m$$

zu einem B-Modul. Wir sagen, der B-Modul $B \otimes_A M$ entstehe aus M durch *Basiswechsel mit φ.*

Der Basiswechsel hat die folgende universelle Eigenschaft: Für alle B-Moduln N ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad \xi \mapsto (m \mapsto \xi(m \otimes 1)),$$

bijektiv mit Umkehrabbildung $\psi \mapsto (b \otimes m \mapsto b\psi(m))$. (Hier wird auf der rechten Seite N als A-Modul via φ aufgefasst, also $a \cdot n := \varphi(a)n$, vgl. Bemerkung 1.73.

Beispiel 1.72. (1) Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, $\varphi\colon R \to S^{-1}$ der natürliche Homomorphismus und M ein R-Modul. Dann ist

$$S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M, \quad \frac{x}{s} \otimes m \mapsto \frac{xm}{s}$$

ein Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln (mit Umkehrabbildung $\frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes m$). Dies folgt auch ohne explizite Rechnung daraus, dass die Lokalisierung die universelle Eigenschaft des Basiswechsels erfüllt.

(2) Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Sei $\varphi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R M \to M/\mathfrak{a}M, \quad \overline{x} \otimes m \mapsto \overline{xm}$$

ein Isomorphismus von $R/\mathfrak{a}$-Moduln (mit Umkehrabbildung $\overline{m} \mapsto 1 \otimes m$). Dies folgt auch ohne explizite Rechnung daraus, dass der Quotient $M/\mathfrak{a}M$ die universelle Eigenschaft des Basiswechsels $R/\mathfrak{a} \otimes_R M$ erfüllt.

(3) Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal. Sei M ein R-Modul. Dann gilt

$$M(\mathfrak{p}) = M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}).$$

Bemerkung 1.73. Ist andererseits $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul, so kann man M als A-Modul auffassen durch die Skalarmultiplikation $a \cdot m := \varphi(a)m$. Wir bezeichnen den so erhaltenen A-Modul in der Regel wieder mit M.

Tensorprodukt von Algebren. Seien R ein Ring und A, B zwei R-Algebren. Dann wird $A \otimes_R B$ mit der (wohldefinierten!) Multiplikation

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

zu einem Ring, und vermöge des Ringhomomorphismus $R \to A \otimes_R B$, $x \mapsto x \otimes 1 (= 1 \otimes x)$ zu einer R-Algebra. Mit den Ringhomomorphismen $\alpha : A \to A \otimes_R B$, $a \mapsto a \otimes 1$ bzw. $\beta : B \to A \otimes_R B$, $b \mapsto 1 \otimes b$ können wir $A \otimes_R B$ auch als A-Algebra bzw. als B-Algebra auffassen.

Satz 1.74 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von Algebren)**.** *Seien R ein Ring und seien A, B zwei R-Algebren.*

Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

von Ringhomomorphismen, und für jeden Ring T zusammen mit Ringhomomorphismen $f : A \to T$, $g : B \to T$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $h : A \otimes_R B \to T$, so dass $f = h \circ \alpha$, $g = h \circ \beta$.

Mit den obigen Notationen ist $h(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$.

Bemerkung 1.75 (Umformulierung des universellen Eigenschaft)*.* Seien A, B zwei R-Algebren. Dann sind die Abbildungen $\alpha\colon A \to A \otimes_R B$, $a \mapsto a \otimes 1$, und $\beta\colon B \to A \otimes_R B$, $b \mapsto 1 \otimes b$, Homomorphismen von R-Algebren.

Für jede R-Algebra C und R-Algebren-Homomorphismen $f\colon A \to C$, $g\colon B \to C$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $h\colon A \otimes_R B \to C$ von R-Algebren, so dass $h \circ \alpha = f$, $h \circ \beta = g$.

Mit anderen Worten: Das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ (zusammen mit den Abbildungen α β) erfüllt die universelle Eigenschaft des Koprodukts in der Kategorie der R-Algebren, siehe Definition 2.3.

Bemerkung 1.76.
(1) Ist B eine A-Algebra und ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so gilt $A/\mathfrak{a} \otimes_A B = B/\mathfrak{a}B$.
(2) Ist B eine A-Algebra und ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so gilt $S^{-1}A \otimes_A B = S^{-1}B$.
(3) Ist B eine A-Algebra, so gilt $A[X] \otimes_A B = B[X]$.

2. Funktoren und exakte Sequenzen

2.1. **Kategorien und Funktoren.** [GW] App. A

Definition 2.1. Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ ist gegeben durch
(1) eine Klasse $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ von *Objekten*
(2) für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ eine Klasse $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* von X nach Y

(3) für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ eine Abbildung (*Verkettung von Morphismen*)

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f,$$

(4) für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ein Element $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ (*Identitätsmorphismus*),

so dass

(1) $f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_X \circ g = g$ für alle f, g, für die die Verkettung existiert,
(2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, für alle f, g, h, für die diese Verkettungen existieren.

Beispiel 2.2. (1) Die Kategorie der Mengen: Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen zwischen Mengen.
(2) Die Kategorie der Gruppen: Objekte sind Gruppen, Morphismen sind Gruppenhomomorphismen. Entsprechend: Die Kategorie der abelschen Gruppen.
(3) Sei R ein Ring. Die Kategorie $(R - \mathrm{Mod})$ der R-Moduln hat als Objekte die R-Moduln, als Morphismen die R-Modul-Homomorphismen. Die Kategorie $(R - \mathrm{Alg})$ der R-Algebren hat als Objekte die R-Algebren, als Morphismen die R-Algebra-Homomorphismen.
(4) Die Kategorie der topologischen Räume: Objekte sind topologische Räume, Morphismen sind stetige Abbildungen.
(5) Sei G ein Gruppe. Wir können eine Kategorie $\mathscr{C}$ definieren, die ein einziges Objekt X hat, und so dass $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X) = G$. Die Verkettung von Morphismen sei durch die Multiplikation in G gegeben, id_X sei das neutrale Element von G.
(6) Als letztes Beispiel betrachte die Kategorie $\mathscr{C}$, deren Objekte alle Mengen sind, und so dass für Mengen X, Y die Menge der Morphismen definiert sei als

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \{\Gamma \subseteq X \otimes Y \text{ Teilmenge}\}.$$

Die Verknüpfung sei folgendermaßen gegeben: Für $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ setze

$$g \circ f = \{(x, y) \in X \times Z;\ \exists y \in Y : (x, y) \in f, (y, z) \in g\} \in \mathrm{Hom}(X, Z).$$

Definition 2.3 (Kategorielle Sprechweisen)**.** Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $X, Y, \dots \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

(1) Die Elemente von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ heißen *Endomorphismen* von X. Man schreibt auch $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$.
(2) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ heißt *Isomorphismus*, falls ein Morphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann ist g eindeutig bestimmt, und heißt der Umkehrmorphismus zu f.
(3) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ heißt *Monomorphismus*, falls für alle Z und alle $g, g' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ mit $f \circ g = f \circ g'$ gilt: $g = g'$.

(4) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ heißt *Epimorphismus*, falls für alle Z und alle $g, g' \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ mit $g \circ f = g' \circ f$ gilt: $g = g'$.

(5) Ein Objekt P von $\mathscr{C}$ zusammen mit Abbildungen $p\colon P \to X$, $q\colon P \to Y$ heißt *Produkt von X und Y in $\mathscr{C}$*, falls für alle Objekte T zusammen mit Abbildungen $p'\colon T \to X$, $q'\colon T \to Y$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $f\colon T \to P$ in $\mathscr{C}$ existiert, so dass $p' = p \circ f$, $q' = q \circ g$. Das Produkt ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir bezeichnen es mit $X \times Y$, und bezeichnen die Abbildungen p, q als die Projektionen auf X bzw. Y. Entsprechend kann man das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ definieren.

(6) Ein Objekt K von $\mathscr{C}$ zusammen mit Abbildungen $p\colon X \to K$, $q\colon Y \to K$ heißt *Koprodukt von X und Y in $\mathscr{C}$*, falls für alle Objekte T zusammen mit Abbildungen $p'\colon X \to T$, $q'\colon Y \to T$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $f\colon K \to T$ in $\mathscr{C}$ existiert, so dass $p' = f \circ p$, $q' = g \circ q$. Das Koprodukt ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir bezeichnen es mit $X \coprod Y$. Entsprechend kann man das Koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ definieren.

Jeder Isomorphismus ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.

Der Begriff des Koprodukts entsteht aus dem des Produkts durch "Umkehren alle Pfeile".

Beispiel 2.4. (1) Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der Mengen, der abelschen Gruppen oder allgemeiner der Moduln über einem Ring R. Dann ist eine Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist; genau dann ein Monomorphismus, wenn sie injektiv ist; genau dann ein Epimorphismus, wenn sie surjektiv ist.

(2) Punkt (1) ist auch richtig für die Kategorie der Gruppen, es ist aber nicht so leicht zu zeigen, dass jeder Epimorphismus surjektiv ist.

(3) Der Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist ein Epimorphismus, der nicht surjektiv ist. Zugleich ist er ein Monomorphismus, aber kein Isomorphismus.

(4) In der Kategorie der topologischen Räume gibt es Morphismen, die keine Isomorphismen, aber bijektive Abbildungen sind.

Beispiel 2.5. (1) In der Kategorie der Mengen existieren Produkte und Koprodukte für beliebige Indexmengen. Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist das übliche kartesische Produkt. Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist die disjunkte Vereinigung.

(2) Sei R ein Ring. In der Kategorie der R-Moduln existieren Produkte und Koprodukte für beliebige Indexmengen; siehe Definition 1.55.

(3) Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der Körper. Seien k, k' Körper unterschiedlicher Charakteristik. Dann existieren weder das Produkt von k und k' noch das Koprodukt von k und k' in $\mathscr{C}$ (denn es gibt keinen Körper, der Homomorphismen sowohl nach k als auch nach k' zulässt, und keinen Körper der Homomorphismen sowohl von k als auch von k' zulässt).

(4) Sei K ein Körper. In der Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume existieren Produkte für endliche Indexmengen, jedoch (außer in trivialen Fällen) nicht für unendliche Indexmengen.

Funktoren.

Definition 2.6. Seien $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) Funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ist gegeben durch

(1) für jedes $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$,
(2) für jedes $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ ein $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))$,

so dass

(1) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$,
(2) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für alle f, g, so dass die Verkettung $f \circ g$ existiert.

Ein kontravarianter Funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ist gegeben durch

(1) für jedes $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$,
(2) für jedes $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ ein $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(Y),F(X))$,

so dass

(1) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$,
(2) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ für alle f, g, so dass die Verkettung $f \circ g$ existiert.

Bemerkung 2.7. Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab: Ist F ein Funktor und $X \cong Y$, so gilt $F(X) \cong F(Y)$.

Beispiel 2.8. (1) (Vergissfunktoren) Wir haben offensichtliche Funktoren von der Kategorie der Moduln über einem Ring R in die Kategorie der abelschen Gruppen; von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Mengen; von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen usw., die durch Vergessen eines Teils der Struktur (der Skalarmultiplikation; der Addition; der Topologie usw.) gegeben sind. Funktoren dieser Art heißen Vergissfunktoren.
(2) Sei K ein Körper. Der Funktor, der jeden K-Vektorraum auf seinen Dualraum und jede lineare Abbildung auf ihre duale Abbildung abbildet, ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der K-Vektorräume in sich selbst.

Definition 2.9. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, und sei X ein Objekt von $\mathscr{C}$.

(1) Der Hom-Funktor $\operatorname{Hom}(X,\cdot)$ ist der kovariante Funktor von $\mathscr{C}$ in die Kategorie der Mengen, der auf Objekten durch
$$Y \mapsto \operatorname{Hom}(X,Y)$$
und auf Morphismen durch
$$(f\colon Y \to Z) \mapsto (\operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(X,Z),\ g \mapsto f \circ g)$$
definiert ist.

(2) Der Hom-Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ ist der kontravariante Funktor von $\mathscr{C}$ in die Kategorie der Mengen, der auf Objekten durch
$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$$
und auf Morphismen durch
$$(f\colon Y \to Z) \mapsto (\mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(Z, X),\ g \mapsto g \circ f)$$
definiert ist.

(3) Ist $\mathscr{C} = (R{-}\mathrm{Mod})$ die Kategorie der Moduln über einem Ring R, so erhält man auf diese Weise Funktoren von $(R{-}\mathrm{Mod}) \to (R{-}\mathrm{Mod})$.

Lokalisierung ist ein Funktor. Seien R ein Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Wir definieren einen Funktor
$$F\colon (R - \mathrm{Mod}) \to (S^{-1}R - \mathrm{Mod})$$
durch $F(M) := S^{-1}M$, und indem wir einen Homomorphismus $f\colon M \to N$ auf
$$F(f)\colon S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$$
abbilden. Wir schreiben auch $S^{-1}f$ für $F(f)$.

Basiswechsel ist ein Funktor. Sei $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Wir definieren den *Basiswechselfunktor*
$$(R - \mathrm{Mod}) \to (R' - \mathrm{Mod})$$
auf Objekten durch $M \mapsto R' \otimes_R M$ und auf Morphismen durch $(f\colon M \to N) \mapsto \mathrm{id}_{R'} \otimes f$, mit
$$\mathrm{id}_{R'} \otimes f\colon R' \otimes_R M \to R' \otimes_R N, \quad x \otimes m \mapsto x \otimes f(m)$$
Der Lokalisierungsfunktor ist der Spezialfall dieses Funktors für den Ringhomomorphismus $R \to S^{-1}R$.

2.2. **Exakte Sequenzen.** [AM] Ch. 2

Sei R ein Ring. Eine *Sequenz* von R-Moduln ist eine Familie M_i, $i \in \mathbb{Z}$, zusammen mit R-Modul-Homomorphismen
$$\cdots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$
(analog für "Intervalle" in $\mathbb{Z}$ als Indexmengen).

Eine Sequenz heißt *Komplex*, falls $f_{i+1} \circ f_i = 0$ für alle i.

Eine Sequenz heißt *exakt an der Stelle* i (oder *bei* M_i), falls $\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$. Sie heißt *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

Beispiel 2.10. (1) Eine Sequenz
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$
ist genau dann exakt (bei M'), wenn f injektiv ist.

(2) Eine Sequenz
$$M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$
ist genau dann exakt (bei M''), wenn f surjektiv ist.

Definition 2.11. Eine exakte Sequenz der Form
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
heißt *kurze exakte Sequenz.* Die Exaktheit ist dazu äquivalent, dass f injektiv, g surjektiv, und dass $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ ist.

In der Situation der Definition induziert g einen Isomorphismus $M'' \cong M/M'$ (wobei wir M' vermöge der Injektion f als Untermodul von M auffassen). Ist andererseits $N \subseteq M$ ein Untermodul, so geben die Einbettung von N nach M und die kanonische Projektion auf den Quotienten Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz
$$0 \to N \to M \to M/N \to 0.$$

Satz 2.12. (1) *Sei*
$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
eine Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: Die Sequenz ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln N die Sequenz
$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \to \operatorname{Hom}(M, N) \to \operatorname{Hom}(M', N)$$
(vergleiche Definition 2.9) exakt ist.

(2) *Sei*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$
eine Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: Die Sequenz ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln N die Sequenz
$$0 \to \operatorname{Hom}(N, M') \to \operatorname{Hom}(N, M) \to \operatorname{Hom}(N, M'')$$
(vergleiche Definition 2.9) exakt ist.

Satz 2.13 (Schlangenlemma)**.** *Sei R ein Ring und*
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u"] & N \arrow[r, "v"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
ein kommutatives Diagramm von R-Moduln, in dem die Zeilen exakte Sequenzen sind. Dann existiert eine exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f' \xrightarrow{\overline{u}} \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{Ker} f'' \xrightarrow{d}$$
$$N'/\operatorname{Im} f' \xrightarrow{\overline{u'}} N/\operatorname{Im} f \xrightarrow{\overline{v'}} N''/\operatorname{Im} f'' \longrightarrow 0,$$

wobei $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u'}$, $\overline{v'}$ die von u, v, u', v' induzierten Abbildungen sind.

Für einen R-Modul-Homomorphismus $f\colon M \to N$ heißt der Quotient $N/\operatorname{Im} f$ auch der *Kokern von* f und wird mit $\operatorname{Coker} f$ bezeichnet.

Korollar 2.14. *Wenn in der Situation des Schlangenlemmas zwei der drei Homomorphismen f', f, f'' Isomorphismen sind, so auch der dritte.*

2.3. **Exakte Funktoren.** [AM] Ch. 2, 3

Seien R und R' Ringe. Für R-Moduln M, N trägt die Menge $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ durch die Gruppenstruktur auf N die Struktur einer abelschen Gruppe (und sogar, induziert durch die R-Modulstruktur auf N die Struktur eines R-Moduls).

Definition 2.15. Ein (kovarianter) Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *additiv*, falls für alle R-Moduln M, N die durch F gegebene Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{R'}(F(M), F(N))$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

Ein kontravarianter Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *additiv*, falls für alle R-Moduln M, N die durch F gegebene Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{R'}(F(N), F(M))$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

Bemerkung 2.16. Ist F ein additiver Funktor, so gilt $F(0) = 0$.

Definition 2.17.

(1) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *linksexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

die Sequenz

$$0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$$

exakt ist.

(2) Ein kontravarianter Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *linksexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

die Sequenz

$$0 \to F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1)$$

exakt ist.

(3) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *rechtsexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

die Sequenz

$$F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$$

exakt ist. Analog: rechtsexakte kontravariante Funktoren.

(4) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R-\mathrm{Mod}) \to (R'-\mathrm{Mod})$ heißt *exakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz
$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$
die Sequenz
$$0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$$
exakt ist, d. h. wenn F linksexakt und rechtsexakt ist. Analog: exakte kontravariante Funktoren.

Bemerkung 2.18. (1) Sei F ein linksexakter kovarianter Funktor und sei $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3$ exakt. Dann ist $0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

(2) Sei F ein rechtsexakter kovarianter Funktor und sei $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ exakt. Dann ist $F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

(3) Sei F ein exakter kovarianter Funktor und sei $M_1 \to M_2 \to M_3$ exakt. Dann ist $F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

Der Hom-*Funktor ist linksexakt.*

Satz 2.19. *Seien R ein Ring und N ein R-Modul. Dann sind die Funktoren* $\mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ *und* $\mathrm{Hom}(N, \cdot)$ *linksexakt. (Vergleiche Definition 2.9 und Satz 2.12).*

Tensorprodukt ist rechtsexakt.

Satz 2.20. *Seien R ein Ring und N ein R-Modul. Dann ist der Funktor $M \mapsto M \otimes_R N$ rechtsexakt.*

Flache Moduln.

Definition 2.21. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt *flach*, wenn der Funktor $N \mapsto M \otimes_R N$ exakt ist.

Weil Tensorieren stets rechtsexakt ist, ist ein R-Modul M genau dann flach, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $\varphi : N' \to N$ von R-Moduln auch der Homomorphismus $\mathrm{id}_M \otimes \varphi : M \otimes_R N' \to M \otimes_R N$ injektiv ist.

Beispiel 2.22. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Dann ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht flach.

Lemma 2.23. *Seien R ein Ring, N ein R-Modul und M_i, $i \in I$ eine Familie von R-Moduln. Der natürliche R-Modul-Homomorphismus*
$$\left(\bigoplus_i M_i\right) \otimes_R N \to \bigoplus_i (M_i \otimes_R N), \quad (m_i)_i \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_i,$$
ist ein Isomorphismus.

Satz 2.24. *Ist R ein Ring und M ein freier R-Modul, so ist M flach.*

Insbesondere folgt aus dem Satz: Ist K ein Körper, so ist jeder K-Vektorraum flach.

Eine R-Algebra A heißt flach, wenn A als R-Modul flach ist.

Beispiel 2.25. Sei k ein Körper, $R = k[T]$.

(1) Die R-Algebren $R[X]/(X-T)$ und $R[X]/(X^2-T)$ sind flach (sie sind sogar freie R-Moduln).
(2) Die R-Algebra $R[X]/(XT-1)$ ist flach (aber kein freier R-Modul).
(3) Die R-Algebra $R[X]/(XT)$ ist nicht flach.

Lokalisierung ist exakt.

Satz 2.26. *Seien R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist der Funktor $M \mapsto S^{-1}M$ exakt.*

Korollar 2.27. *Sei R ein Ring, und sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Ist $N \subseteq M$ eine Inklusion von R-Moduln, so ist $S^{-1}N \subseteq S^{-1}M$ und $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.*

Satz 2.28. *Sei R ein Ring, $f\colon M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(1) $f = 0$
(2) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist $f \otimes \mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ die Nullabbildung.*
(3) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist $f \otimes \mathrm{id}_{R_\mathfrak{m}}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ die Nullabbildung.*

Satz 2.29. *Sei R ein Ring, und sei*

$$M' \to M \to M''$$

eine Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:

(1) *Die Sequenz $M' \to M \to M''$ ist exakt.*
(2) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist die Sequenz $(M')_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to (M'')_\mathfrak{p}$ exakt.*
(3) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist die Sequenz $(M')_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \to (M'')_\mathfrak{m}$ exakt.*

Satz 2.30. *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) *Der R-Modul M ist flach.*
(2) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist der $R_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p}$ flach.*
(3) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist der $R_\mathfrak{m}$-Modul $M_\mathfrak{m}$ flach.*

2.4. **Abelsche Kategorien.** Der Formalismus der exakten Funktoren kann noch in einem allgemeineren Rahmen studiert werden, den wir hier kurz anreißen wollen.

Definition 2.31. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(1) Ein *initiales Objekt* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt I, so dass für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ genau ein Morphismus $I \to X$ existiert.
(2) Ein *terminales Objekt* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt T, so dass für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ genau ein Morphismus $X \to T$ existiert.

(3) Ein *Nullobjekt* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt, das sowohl initial als auch terminal ist.

Alle obigen Eigenschaften lassen sich als universelle Eigenschaften auffassen, so dass initiale, terminale und Null-Objekte jeweils eindeutig bestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, sofern sie existieren. Äquivalent können wir ein initiales Objekt auch als ein "leeres Produkt" (ein Objekt, das die universelle Eigenschaft des Produkts für die leere Menge als Indexmenge hat) und ein terminales Objekt als "leeres Koprodukt" definieren.

Beispiel 2.32. In der Kategorie der Mengen ist $\emptyset$ initial und jede Menge mit einem einzigen Element terminal. In der Kategorie der Ringe ist $\mathbb{Z}$ initial und der Nullring terminal. In beiden Fällen existiert kein Nullobjekt. In der Kategorie der Gruppen und in der Kategorie der abelschen Gruppen ist jeweils die triviale Gruppe ein Nullobjekt. Ist R ein Ring, so ist der Nullmodul ein Nullobjekt in der Kategorie der R-Moduln. Die Kategorie der Körper besitzt weder ein initiales noch ein terminales Objekt.

Definition 2.33. Eine *additive Kategorie* ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, in der alle Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ mit der Struktur einer abelschen Gruppe (die wir additiv schreiben) ausgestattet sind, so dass die Komposition von Morphismen bilinear ist, und in der alle endlichen Produkte existieren.

Bemerkung 2.34. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie

(1) Sind X, Y Objekte in $\mathcal{C}$ und $X \times Y$ deren Produkt, so ist $X \times Y$ zusammen mit den Abbildungen $X \to X \times Y$ (induziert von $\mathrm{id}\colon X \to X$, $0\colon X \to Y$) und $Y \to X \times Y$ (analog) ein Koprodukt von X und Y. Allgemeiner zeigt man, dass jedes endliche Produkt (mit den offensichtlichen Abbildungen) gleich dem Koprodukt der entsprechenden Objekte ist. Insbesondere ist das leere Produkt in $\mathcal{C}$, das nach Voraussetzung existiert, ein Nullobjekt.
(2) Man kann zeigen, dass die Gruppenstrukturen auf den $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ eindeutig bestimmt sind, sofern sie existieren.

Definition 2.35. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.

(1) Ein *Kern* von f ist ein Morphismus $a\colon K \to X$, der die folgende universelle Eigenschaft hat: Für alle Objekte T in $\mathcal{C}$ ist die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,K) \to \{g\colon T \to X;\ f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto a \circ h,$$
bijektiv.
(2) Ein *Kokern* von f ist ein Morphismus $b\colon Y \to C$, der die folgende universelle Eigenschaft hat: Für alle Objekte T in $\mathcal{C}$ ist die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,T) \to \{g\colon Y \to C;\ g \circ f = 0\}, \quad h \mapsto h \circ b,$$
bijektiv.

Kerne und Kokerne sind eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Jeder Kern ist ein Monomorphismus und jeder Kokern ist ein Epimorphismus. Bezeichnung: $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$.

Ist $\mathcal{C}$ die Kategorie der Moduln über einem Ring R, und $f\colon X \to Y$ ein R-Modul-Homomorphismus, so ist die Inklusion $\mathrm{Ker}(f) \to X$ ein Kern im Sinne der obigen Definition (und allgemeiner ist jeder injektive R-Modul-Homomorphismus $K \to X$ mit Bild $\mathrm{Ker}(f)$ ein Kern). Entsprechend ist die kanonische Projektion $Y \to Y/\mathrm{Im}(f)$ (und allgemeiner jeder surjektive R-Modul-Homomorphismus $Y \to C$ mit Kern $\mathrm{Im}(f)$) ein Kokern von f.

Definition 2.36. Ein *abelsche Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathcal{C}$, so dass gilt:

(1) Jeder Morphismus in $\mathcal{C}$ besitzt einen Kern und einen Kokern.
(2) Jeder Monomorphismus ist ein Kern eines Morphismus, und jeder Epimorphismus ist ein Kokern eines Morphismus.

Die Kategorie der abelschen Gruppen und allgemeiner die Kategorie der R-Moduln über einem Ring R sind abelsche Kategorien. Die Kategorie aller freien abelschen Gruppen (d.h. derjenigen abelschen Gruppen, die frei sind als $\mathbb{Z}$-Modul) ist additiv, aber nicht abelsch.

Ist $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, so können wir das Bild $\mathrm{Im}(f)$ von f im kategoriellen Sinne definieren als $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ (und es gibt dann einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$).

Da Bilder und Kerne von Morphismen existieren, kann man den Begriff der exakten Sequenz und dann auch den Begriff des exakten Funktors zwischen abelschen Kategorien definieren. Man kann dan zum Beispiel zeigen, dass das Schlangenlemma in jeder abelschen Kategorie richtig ist. In der *Homologischen Algebra* werden systematisch solche Funktoren untersucht, die links- oder rechtsexakt sind, aber nicht exakt sind, und es werden Methoden entwickelt, um genauer zu beschreiben, "inwiefern" ein solcher Funktor nicht exakt ist.

3. Ganze und endliche Ringhomomorphismen

3.1. **Definitionen, einfache Eigenschaften.** [AM] Ch. 5, [M2] §9

Definition 3.1. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

(1) Ein Element $b \in B$ heißt *ganz über A (bezüglich φ)*, wenn ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ existiert mit $f(b) = 0$.
(2) Der Homomorphismus φ heißt *ganz*, falls jedes Element $b \in B$ ganz über A ist.
(3) Der Homomorphismus φ heißt *endlich*, falls B als A-Modul endlich erzeugt ist.

Definition 3.2. Sei B eine A-Algebra. Dann heißt B eine *endlich erzeugte A-Algebra*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es existieren endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$, so dass B die kleinste A-Unteralgebra von B ist, die alle b_i enthält.
(2) Es existiert $n \geq 0$ und ein surjektiver A-Algebren-Homomorphismus $A[X_1, \dots, X_n] \to B$.

Im folgenden Satz benutzen wir die Determinante von quadratischen Matrizen mit Einträgen in einem beliebigen kommutativen Ring. Wir definierten die Determinante durch die Leibniz-Formel. Insbesondere können wir dann zu jeder Matrix $m \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ die Komplementärmatrix von m im Sinne der Cramerschen Regel bilden.

Satz 3.3. (1) *(Cramersche Regel) Sei R ein Ring, $m \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Sei $\tilde{m}$ die Komplementärmatrix von m im Sinne der Cramerschen Regel. Dann gilt*
$$m\tilde{m} = \tilde{m}m = \det(m)E_n.$$
(2) *("Cayley-Hamilton") Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und $\varphi\colon M \to M$ ein R-Endomorphismus von M mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann existieren Elemente $a_i \in \mathfrak{a}$ mit*
$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}_M = 0 \qquad \mathit{in}\, \mathrm{End}(M).$$

Satz 3.4. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und sei $b \in B$. Dann sind äquivalent:*
(1) *Das Element b ist ganz über A.*
(2) *Die von b erzeugte A-Algebra $A[b]$ ist als A-Modul endlich erzeugt, d.h. $A \to A[b]$ ist ein endlicher Ringhomomorphismus.*
(3) *Es existiert ein Unterring $C \subseteq B$ mit $b \in C$, so dass $A \to C$ ein endlicher Ringhomomorphismus ist.*

Korollar 3.5. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*
(1) *φ ist ganz und B ist als A-Algebra endlich erzeugt.*
(2) *φ ist endlich.*

Korollar 3.6. *Seien $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen.*
(1) *Wenn φ und ψ endlich sind, so ist auch $\psi \circ \varphi$ endlich.*
(2) *Wenn φ und ψ ganz sind, so ist auch $\psi \circ \varphi$ ganz.*

Definition 3.7. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist die Teilmenge
$$C := \{b \in B;\ b \text{ ist ganz über } A\}$$
ein Unterring von B, der als der *ganze Abschluss von A in B* bezeichnet wird.

Definition 3.8. Sei $\varphi A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann heißt A *ganzabgeschlossen in B*, wenn A mit dem ganzen Abschluss von A in B übereinstimmt, mit anderen Worten: wenn die einzigen Elemente von B, die ganz über A sind, die Elemente von A sind.

Ein Integritätsring heißt *ganzabgeschlossen*, wenn er ganzabgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Bemerkung 3.9. Seien $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $C \subseteq B$ der ganze Abschluss von A in B. Dann ist C ganzabgeschlossen in B.

Satz 3.10. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein endlicher (bzw. ganzer) Ringhomomorphismus.*

(1) *Ist $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \to B/\mathfrak{b}$ endlich (bzw. ganz).*
(2) *Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $S^{-1}A \to S^{-1}B$ endlich (bzw. ganz).*
(3) *Ist C eine A-Algebra, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $C \to B \otimes_A C$ endlich (bzw. ganz).*

3.2. **Going-up.** [AM] Ch. 5, [M2] §9

Satz 3.11. *Seien A und B Integritätsringe und sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist A ein Körper genau dann, wenn B ein Körper ist.*

Satz 3.12. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.*

Satz 3.13. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, seien $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ Primideale von B mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

Theorem 3.14. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist die von φ induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv, d.h. für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.*

Theorem 3.15 (going-up)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus, sei*

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subset A$$

eine Kette von Primidealen, und sei

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \subset B$$

eine Kette von Primidealen in B mit $m \le n$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, m$.

Dann existieren Primideale $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n \subset B$, so dass $\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1}$ und so dass $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$ für alle i.

Theorem 3.16. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Dann sind die Fasern der Abbildung ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ endliche Mengen, und zwischen den Primidealen in einer Faser bestehen keine echten Inklusionen.*

Satz 3.17. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die von φ induzierte Abbildung, sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und sei $\kappa(\mathfrak{p})$ der Restklassenkörper von A in $\mathfrak{p}$. Dann induziert die natürliche Abbildung* $\operatorname{Spec}(B \otimes_A$

$\kappa(p)) \to \operatorname{Spec} B$ eine Bijektion [genauer: sogar einen Homöomorphismus] von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(p))$ auf die Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ von f über $\mathfrak{p}$.

Definition 3.18. Ein Ring R heißt *Artin-Ring*, wenn für die Ideale in R die absteigende Kettenbedingung gilt, d.h., falls jede absteigende Kette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots$$

von Idealen in R stationär wird. (Vgl. [AM] Ch. 8.)

Satz 3.19. *Sei A ein Körper und $A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Dann ist B ein Artin-Ring.*

Satz 3.20. *Sei B ein Artin-Ring.*

(1) *Alle Primideale von B sind maximale Ideale.*
(2) *B besitzt nur endlich viele Primideale.*

3.3. Noether-Normalisierung und der Hilbertsche Nullstellensatz.

[AM] Ch. 5, [Mu] I.1, [GW] (1.3).

Theorem 3.21 (Noethersches Normalisierungslemma)**.** *Sei k ein Körper und sei $R \neq 0$ eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $n \geq 0$ und ein injektiver endlicher k-Algebren-Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \to R$.*

Definition 3.22. Ein Ring A heißt *Jacobsonsch*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}} \mathfrak{m}.$$

Theorem 3.23 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra.*

(1) *Der Ring A ist Jacobsonsch.*
(2) *Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, so ist $k \to A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung.*

Korollar 3.24. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

(1) *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra und sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann gilt $A/\mathfrak{m} = k$.*
(2) *Sei $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \dots, T_n]$ ein maximales Ideal. Dann existieren $t_1, \dots, t_n \in k$ mit $\mathfrak{m} = (T_1 - t_1, \dots, T_n - t_n)$.*

Korollar 3.25. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$. Dann haben wir eine Bijektion*

$$\{(t_i)_i \in k^n;\ \forall j : f_j(t_1, \dots, t_n) = 0\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spm} k[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m),$$
$$(t_i)_i \mapsto (T_1 - t_1, \dots, T_n - t_n)$$

Korollar 3.26. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$. Dann gilt*

$$V(f_1, \dots, f_m) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad (f_1, \dots, f_m) = (1).$$

Korollar 3.27. *Sei k ein Körper und sei $\varphi\colon A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren. Dann ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{n} \subset B$ das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ ein maximales Ideal von A.*

4. Noethersche Ringe

4.1. **Definition und einfache Eigenschaften.** [AM] Ch. 6, 7, [M2] §3

Definition 4.1. Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede aufsteigende Kette
$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$$
von Idealen in R wird stationär, d.h. es existiert $n \geq 0$, so dass $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_n$ für alle $m \geq n$.

(2) Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.

(3) Jede nichtleere Menge von Idealen in R besitzt ein maximales Element bezüglich Inklusion.

Beispiel 4.2. (1) Jeder Hauptidealring ist noethersch.

(2) Ist R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist auch $R/\mathfrak{a}$ noethersch.

(3) Sei $R \neq 0$ ein Ring. Dann ist der Polynomring $R[X_i;\ i \in \mathbb{N}]$ in unendlich vielen Unbestimmten nicht noethersch. Insbesondere sind Unterringe noetherscher Ringe nicht notwendig noethersch.

Satz 4.3. *Sei R ein noetherscher Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist $S^{-1}R$ noethersch.*

Definition 4.4. Sei R ein Ring (nicht notwendig noethersch). Ein R-Modul M heißt noethersch, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M wird stationär.

(2) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

(3) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element bezüglich Inklusion.

Mit dieser Definition gilt: Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn der R-Modul R noethersch ist.

Satz 4.5. *Sei R ein Ring.*

(1) *Sei*
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: M ist genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.

(2) *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.*

4.2. **Der Hilbertsche Basissatz.** [AM] Ch. 7, [M2] §3

Theorem 4.6 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

Korollar 4.7. *Sei R ein noetherscher Ring und A eine endlich erzeugte R-Algebra. Dann ist auch der Ring A noethersch.*

5. Die Krull-Dimension eines Rings

[Mu] I §7, [GW] (5.3)–(5.6), [AM] Ch. 11, [M2] §5.

5.1. Definition und einfache Eigenschaften.

Definition 5.1.
(1) Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen X *irreduzibel*, wenn X nicht leer ist und die folgenden äquivalenten Eigenschaften gelten:
  (i) Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A \cup B$, so gilt $A = X$ oder $B = X$.
  (ii) Sind $U, V \subseteq X$ nicht-leere offene Teilmengen von X, so gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

  Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn sie als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.
(2) Sei X ein topologischer Raum. Die *Dimension* $\dim X$ von X ist das Supremum aller Längen ℓ von Ketten
$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_\ell$$
von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Per Konvention setzen wir $\dim \emptyset = -\infty$.

Ist beispielsweise X ein einziger Punkt, so gilt $\dim X = 0$. Ist X irreduzibel, $\dim X < \infty$ und $Z \subsetneq X$ eine echte abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so gilt $\dim Z < \dim X$.

Bemerkung 5.2. Dieser Dimensionsbegriff ist für die topologischen Räume, die in der algebraischen Geometrie auftreten, gut geeignet — speziell für Räume der Form $\operatorname{Spec} R$ für einen Ring R. Für andere topologische Räume ist er aber nicht unbedingt sinnvoll.

Lemma 5.3. *Sei R ein Ring. Eine abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} R$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist.*

Definition 5.4. Sei R ein Ring. Die (Krull-)Dimension $\dim R$ von R ist das Supremum aller Längen ℓ von Ketten
$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_\ell$$
von Primidealen in R. Für den Nullring setzen wir $\dim 0 = -\infty$.

Lemma 5.5. *Sei R ein Ring. Dann gilt* $\dim R = \dim \operatorname{Spec} R$.

Satz 5.6. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann gilt* $\dim A = \dim B$.

Insbesondere zeigt der Satz, dass in der Situation des Noether-Normalisierungslemma Thm. 3.21 die Zahl n als $\dim R$ eindeutig bestimmt ist.

5.2. **Irreduzible Komponenten und minimale Primideale.** [GW] (1.5), (1.7)

Definition 5.7. Sei X ein topologischer Raum. Die maximalen irreduziblen Teilmengen von X heißen *irreduzible Komponenten.*

Lemma 5.8. *Sei X ein topologischer Raum.*

(1) *Jede irreduzible Teilmenge von X ist in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Insbesondere ist X gleich der Vereinigung aller seiner irreduziblen Komponenten.*
(2) *Sei $Z \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $\overline{Z}$ ihr Abschluss in X. Es gilt: Z ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{Z}$ irreduzibel ist.*
(3) *Jede irreduzbile Komponente von X ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Insbesondere sehen wir: Ist R ein Ring, so steht die Menge der irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ in Bijektion zur Menge der minimlaen Primideale von R.

Definition 5.9. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von X stationär ist.

Bemerkung 5.10. Ist R ein noetherscher Ring, so ist der topologische Raum $\operatorname{Spec} R$ noethersch. (Die Umkehrung gilt aber nicht.)

Satz 5.11. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

Satz 5.12. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann hat R nur endlich viele minimale Primideale.*

5.3. **Die Dimension von endlich erzeugten Algebren über einem Körper.**

Der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung. [Bo] 7.1

Definition 5.13. Sei L/K eine Körpererweiterung.

(1) Eine Teilmenge $S \subseteq L$ heißt *algebraisch unabhängig über K*, wenn der Einsetzungshomomorphismus
$$K[X_s, s \in S] \to L, \quad X_s \mapsto s,$$
injektiv ist.
(2) Eine Teilmenge $S \subseteq L$ heißt eine *Transzendenzbasis* der Erweiterung L/K, wenn S algebraisch unabhängig über K ist und die Erweiterung $L/K(S)$ algebraisch ist.

Lemma 5.14. *Sei L/K eine Körpererweiterung.*

(1) *Eine Teilmenge $S \subseteq L$ ist genau dann algebraisch unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge es ist.*
(2) *Eine Teilmenge $S \subseteq L$ ist genau dann eine Transzendenzbasis, wenn sie eine maximale algebraisch unabhängige Teilmenge von L ist.*
(3) *Die Erweiterung L/K besitzt eine Transzendenzbasis.*
(4) *Sind S, S' Transzendenzbasen der Erweiterung L/K, so existiert eine Bijektion $S \xrightarrow{\sim} S'$. Insbesondere ist die Anzahl der Elemente einer Transzendenzbasis (genauer: die Mächtigkeit einer Transzendenzbasis) unabhängig von der Wahl der Transzendenzbasis. Diese Mächtigkeit wird als der* Transzendenzgrad *der Erweiterung L/K bezeichnet, in Zeichen:* $\operatorname{trdeg}_K L$.

Insbesondere sehen wir: Eine Erweiterung L/K ist genau denn algebraisch, wenn sie den Transzendenzgrad 0 hat.

Ist R eine k-Algebra, die ein Integritätsring ist, so schreiben wir auch $\operatorname{trdeg}_k R := \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Frac}(R)$.

Beispiel 5.15. Ist K ein Körper, so gilt

$$\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \dots, X_n] = \operatorname{trdeg}_K K(X_1, \dots, X_n) = n.$$

Die Normabbildung einer Körpererweiterung. [Bo] 4.7.

Definition 5.16. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Für $x \in L$ sei φ_x der K-Vektorraum-Homomorphismus $L \to L$, $y \mapsto xy$. Wir nennen $N_{L/K}(x) := \det(\varphi_x) \in K$ die *Norm* von x und die Abbildung $N_{L/K}\colon L \to K$ die *Normabbildung* der Erweiterung L/K.

Satz 5.17 (Eigenschaften der Normabbildung)**.** *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung.*
(1) *Ist $x \in K$, so gilt $N_{L/K}(x) = x^{[L:K]}$.*
(2) *Sind $x, y \in L$, so gilt $N_{L/K}(xy) = N_{L/K}(x)N_{L/K}(y)$.*
(3) *Ist $x \in L$ und* $\operatorname{minpol}_K(x) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$, *so gilt*

$$N_{L/K}(x) = (-1)^{[L:K]}\, a_0^{[L:K(x)]}.$$

Bemerkung 5.18. Weitere wichtige Eigenschaften der Normabbildung sind
(1) Transitivität: Sind $K \subset E \subset L$ endliche Körpererweiterungen und ist $x \in L$, so gilt $N_{L/K}(x) = N_{L/E}(N_{E/K}(x))$.
(2) Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung, so gilt

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)} \sigma(x).$$

Theorem 5.19. *Seien k ein Körper und R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Sei $f \in R$, $f \neq 0$ ein Element, das keine Einheit in R ist, und sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, das f enthält und das minimal mit dieser Eigenschaft ist. Dann gilt*

$$\operatorname{trdeg}_k R/\mathfrak{p} = \operatorname{trdeg}_k R - 1.$$

Korollar 5.20. *Sei k ein Körper.*

(1) *Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann gilt* $\dim R = \operatorname{trdeg}_k R$.
(2) *Sei $n \geq 0$. Dann gilt* $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$.

Korollar 5.21. *Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann haben alle maximalen Ketten von Primidealen in R (d.h. alle Ketten, die nicht durch das Einfügen weiterer Primideale verfeinert werden können) die Länge* $\dim R$.

5.4. **Noethersche Ringe.** Für allgemeine noethersche Ringe ist die Situation komplizierter. Immerhin haben wir die folgenden Ergebnisse:

Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so nennt man $\operatorname{ht} \mathfrak{p} := \dim R_{\mathfrak{p}}$ die *Höhe* des Primideals $\mathfrak{p}$.

Theorem 5.22 (Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und sei $(f) \subsetneq R$ ein Hauptideal. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ von R mit $f \in \mathfrak{p}$ und das minimal ist mit dieser Eigenschaft, dass*

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq 1.$$

Theorem 5.23. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann gilt*

$$\dim R[X] = \dim R + 1.$$

Beispiel 5.24. Sei R ein lokaler Hauptidealring, $(t) \subset R$ das maximale Ideal. Dann ist $R[X]/(tX - 1) \cong R_t = \operatorname{Frac}(R)$ ein Körper, also $(tX - 1)$ ein maximales Ideal *von Höhe* 1, es gilt also

$$\dim R[X]/(tX - 1) = 0 < 1 = \dim R[X] - 1.$$

Literatur

[AM] M. Atiyah, I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley
[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer
[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, oder auf Englisch: *Commutative Algebra*, Ch. 1–10.
[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View towards Algebraic Geometry*, Springer GTM
[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg.
[M1] H. Matsumura, *Commutative Algebra*
[M2] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press
[Mu] D. Mumford, *The Red Book on Varieties and Schemes*, Springer LNM 1358.
[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer.
[S] J.-P. Serre, *Corps locaux* (oder auf Englisch: *Local fields*, Springer GTM)
[ZS] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. I, Vol. II, Springer.