

Algebra, WS 2021/22

Ulrich Görtz

Version vom 4. Oktober 2021.

Online-Version des Skripts: <https://math.ug/algebra-ws2122/>

Ulrich Görtz

Universität Duisburg-Essen

Fakultät für Mathematik

45117 Essen

ulrich.goertz@uni-due.de

Ich freue mich über Kommentare und Berichtigungen.

© Ulrich Görtz, 2021.

Lizenz: [CC BY-NC-ND 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)¹. [Lesbare Kurzform](#)². Das bedeutet insbesondere: Sie dürfen die PDF-Datei (unverändert) ausdrucken und als Datei oder ausgedruckt weitergeben, wenn es nicht kommerziellen Zwecken dient.

Gesetzt in der Schrift [Vollkorn](http://vollkorn-typeface.com/)³ von F. Althausen mit LuaLaTeX, TikZ und anderen TeX-Paketen. Einige Abbildungen wurden mit [IPE](http://ipe.otfried.org/)⁴ erstellt. Die HTML-Version wird mit [plasTeX](https://github.com/plastex/plastex)⁵ erzeugt.

¹<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.de>

²<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de>

³<http://vollkorn-typeface.com/>

⁴<http://ipe.otfried.org/>

⁵<https://github.com/plastex/plastex>

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	5
1.1. Inhalt der Vorlesung	5
1.2. Wichtige Sätze und Folgerungen	7
1.3. Vorkenntnisse	8
Kapitel 2. Gruppen	11
2.1. Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Untergruppen	11
2.2. Der Quotient nach einem Normalteiler	15
2.3. Gruppenwirkungen	20
2.4. Zyklische Gruppen	24
2.5. Die symmetrische Gruppe	27
2.6. Auflösbare Gruppen	29
2.7. Die Sylow-Sätze	37
2.8. Wie untersucht man eine Gruppe? *	41
Kapitel 3. Ringe	43
3.1. Ringe und Ringhomomorphismen	43
3.2. Ideale, der Quotient eines Rings nach einem Ideal	43
3.3. Primideale und maximale Ideale	44
3.4. Faktorielle Ringe	47
3.5. Der Satz von Gauß	48
3.6. Irreduzibilitätskriterien	49
3.7. Wie untersucht man einen Ring?	50
Kapitel 4. Körper und Körpererweiterungen	51
4.1. Körper und die Charakteristik eines Körpers	51
4.2. Algebraische Körpererweiterungen	51
4.3. Adjunktion von Nullstellen nach Kronecker	54
4.4. Die Existenz des algebraischen Abschlusses	54
4.5. Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	57
Kapitel 5. Galois-Theorie	59
5.1. Normale Körpererweiterungen	59
5.2. Separable Körpererweiterungen	60
5.3. Rein inseparable Körpererweiterungen *	61
5.4. Endliche Körper	61
5.5. Galois-Erweiterungen	62
5.6. Die Galois-Gruppe einer Gleichung	64
5.7. Wie untersucht man einen Körper?	65
Kapitel 6. Anwendungen der Galois-Theorie	67
6.1. Lineare Unabhängigkeit von Charakteren *	67
6.2. Norm und Spur, Hilbert 90 *	67
6.3. Einheitswurzeln und zyklische Erweiterungen	68
6.4. Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale	70

6.5.	Der Hauptsatz über symmetrische Polynome *	70
6.6.	Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	70
6.7.	Das quadratische Reziprozitätsgesetz	71
Anhang A. Zusammenfassung *		75
A.1.	Gruppen	75
A.2.	Ringe	78
A.3.	Algebraische Körpererweiterungen	82
A.4.	Galois-Theorie	85
A.5.	Anwendungen der Galois-Theorie	89
Anhang B. Bemerkungen zur Literatur *		93
B.1.	Deutsche Lehrbücher und Vorlesungsskripte	93
B.2.	Englische Lehrbücher und Vorlesungsskripte	94
B.3.	Klassiker, Sonstige	94
Anhang.	Literaturverzeichnis	97
Anhang.	Index	99

Einleitung

1.1. Inhalt der Vorlesung

Die Vorlesung *Algebra* besteht aus meiner Sicht im wesentlichen aus

- der Untersuchung von Körpern und sogenannten Körpererweiterungen; im Fokus steht dabei die Frage, wann ein Polynom in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in einem Körper K in K oder einem Erweiterungskörper von K eine Nullstelle hat (oder sogar vollständig in Linearfaktoren zerfällt) und
- zu diesem Zweck einem (im Vergleich zur Linearen Algebra) systematischeren Studium des Begriffs der Gruppe, das wir an den Anfang der Vorlesung stellen.

Ein Erweiterungskörper eines Körpers K ist ein Körper L , derart dass K ein Teilkörper von L ist, d.h. es gilt $K \subseteq L$ und die Addition und Multiplikation auf K sind durch Einschränkung der entsprechenden Verknüpfungen auf L gegeben. Wir nennen das Paar $K \subseteq L$ dann auch eine *Körpererweiterung* und schreiben oft L/K .

Neben den konkreten Sätzen (siehe unten) ist ein wichtiges Lernziel der Vorlesung der Umgang mit »abstrakten mathematischen Strukturen«. An mehreren Stellen ist der Abstraktionsgrad höher als in der Linearen Algebra, dsa bedeutet, dass es schwieriger ist, ein »Gefühl« für die entsprechenden Begriffe zu entwickeln, damit man wirklich mit ihnen umgehen kann. Zusätzlich ist es so, dass der Stoff der Algebra-Vorlesung (wie bei fast allen Mathematik-Vorlesungen, und ähnlich wie in anderen Fächern) über ungefähr 200 Jahre hin immer weiter optimiert und in eine stromlinienförmige Gestalt gebracht wurde. Das hat den Vorteil, dass man in der zur Verfügung stehenden Zeit zu mehreren wichtigen und teilweise (mathematisch gesehen) spektakulären Ergebnissen kommen kann, deren Beweise alles andere als offensichtlich sind, aus vielen Schritten bestehen und in teils überraschender Art verschiedene Konzepte zusammenbringen. Der Nachteil liegt allerdings auch auf der Hand: Es ist nicht von vorneherein offensichtlich, welche Bedeutung einige Ergebnisse aus der ersten Vorlesungshälfte später haben werden und warum dieser oder jener Begriff überhaupt eingeführt wird (auch wenn ich mir Mühe geben werde, das jeweils an Ort und Stelle zu motivieren).

Außerdem spiegelt so eine Vorlesung nicht wider, wie sich eine mathematische Theorie entwickelt. Das könnte man mit einer Stadtführung vergleichen, wo typischerweise nur die schönen und besonders sehenswerten Ecken gezeigt werden, aber nicht die Sackgassen mit den heruntergekommenen Häusern...



Mathematik ist kein vorsichtiger Gang auf einer gut geräumten Straße, sondern eine Reise in eine fremde Wildnis, in der sich die Entdecker oft verlaufen.

W.S. Anglin

Dennoch ist es, um Mathematik zu lernen, wichtig, auf eigene Faust auch einmal Sackgassen und Irrwege kennenzulernen, Fehler zu machen, *eigene* Beweise zu finden (auch wenn sie im Nachhinein betrachtet vielleicht unnötig umständlich sind), usw. Auch das muss und wird in der Veranstaltung abgedeckt werden, und zwar – Sie ahnen es wahrscheinlich – durch die Bearbeitung der Hausaufgaben und den Besuch der Übungsgruppen.

Damit, dass die Ergebnisse tiefliegender sind als in den Anfängervorlesungen, geht einher, dass sie weiter entfernt sind von konkreten Anwendungen. Während Methoden der Linearen Algebra »überall« benötigt werden, ist beispielsweise die Tatsache, dass das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, nicht jedoch das regelmäßige 7-Eck, zwar die Lösung eines mathematischen Problems, das die Mathematik seit über 2000 Jahren beschäftigt hat, und auch insofern interessant, als der Lösungsweg unerwartet und trotz seiner Komplexität auch extrem elegant ist. Für die Praxis hat diese Sache aber keinerlei Bedeutung. Es gibt zwar durchaus Anwendungen, die auf den Ergebnissen der Algebra bzw. auf darauf aufbauenden Theorien beruhen (die Kryptographie mit elliptischen Kurven ist ein häufig genanntes Beispiel, auch in der Kodierungstheorie spielt die Theorie der (endlichen) Körper eine Rolle), aber diese benötigen dann oft noch deutlich mehr Theorie (zum Beispiel die algebraische Geometrie). Daher beschäftigen sich auch die *Ergänzungen* im Skript größtenteils mit innermathematischen Themen und Ausblicken.

”

Es kann nicht geleugnet werden, daß ein großer Teil der elementaren Mathematik von erheblichem praktischen Nutzen ist. Aber diese Teile der Mathematik sind, insgesamt betrachtet, ziemlich langweilig. Dies sind genau diejenigen Teile der Mathematik, die den geringsten ästhetischen Wert haben. Die »echte« Mathematik der »echten« Mathematiker, die Mathematik von Fermat, Gauß, Abel und Riemann ist fast völlig »nutzlos«.

G. H. Hardy^a

^aZur Sicherheit der Hinweis: Die im Skript eingestreuten Zitate sollten in erster Linie zur Auflockerung dienen. Auch wenn ich jedenfalls bei den meisten davon finde, dass sie einen wahren Kern haben oder es wenigstens lohnenswert ist, darüber nachzudenken, wie die jeweilige Aussage gemeint ist, stimme ich definitiv nicht jedem zu.

”

Alle Pädagogen sind sich darin einig: Man muß vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs praktische Leben größten direkten Nutzen gewährt.

Felix Klein

Das soll aber nicht heißen, dass die Themen dieser Vorlesung nicht interessant wären – im Gegenteil ist aus meiner Sicht die *Algebra* eine der schönsten Vorlesungen des Mathematikstudiums, weil, wie schon angedeutet, die Lösungen mehrerer Probleme erklärt werden können, die über Jahrhunderte Mathematiker*innen fasziniert haben und die mit der Theorie der Galois-Erweiterungen sehr durchsichtig dargestellt werden können. Die Kraft der mathematischen Abstraktion kommt hier noch weitaus stärker zum Tragen als in der Linearen Algebra (oder den Anfängervorlesungen der Analysis), wo die allermeisten Begriffe und Ergebnisse (auch) einen konkreten, »rechnerischen« Zugang erlauben.

1.2. Wichtige Sätze und Folgerungen

Einige wichtige Sätze, die wir im Laufe der Vorlesung beweisen werden, sind die folgenden. Zum Teil fehlt uns im Moment allerdings noch die Terminologie, um ihren Inhalt präzise zu beschreiben.

- Die Sylow-Sätze geben über die Untergruppen einer Gruppe Aufschluss, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist.
- Der Satz von Gauß besagt, dass der Polynomring über einem faktoriellen Ring selbst faktoriell ist und gibt eine genaue Beschreibung der irreduziblen Elemente darin (in Termen der Irreduzibilität im Polynomring über dem Quotientenkörper des Grundrings).
- Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Teilkörper, und ist $x \in M$ Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in L , so dass jeder dieser Koeffizienten Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in K ist, so ist auch x Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in K .
- Ist K ein Körper, so existiert ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K .
- Zu jeder Primzahlpotenz $q = p^r$ (mit $r \geq 1$) existiert ein Körper mit q Elementen (und dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt).
- Der *Hauptsatz der Galois-Theorie*, der eine Bijektion zwischen den Zwischenkörpern einer galoisschen Körpererweiterung und den Untergruppen der sogenannten Galois-Gruppe dieser Erweiterung angibt und damit einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Körpererweiterungen und der Gruppentheorie herstellt.

Als »Anwendungen« werden wir am Ende der Vorlesung dann

- einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben (also zeigen, dass der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist), der nur ganz wenige Zutaten aus der Analysis benötigt (dass es ganz ohne Analysis nicht gehen kann, ist insofern klar, als die komplexen Zahlen von ihrer Natur aus ein »analytisches« Objekt sind),
- zeigen, dass es Polynomgleichungen mit Koeffizienten in \mathbb{Q} gibt, deren Nullstellen (in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}) nicht mit den Grundrechenarten und dem Ziehen n -ter Wurzeln hingeschrieben werden können. (Man sagt, diese Gleichungen seien nicht »auflösbar durch Radikale«.) Insbesondere kann es keine allgemeine Lösungsformel ähnlich der Lösungsformel für quadratische Gleichungen im allgemeinen Fall geben. Wir werden auch sehen, warum dieses Phänomen nur in Grad ≥ 5 auftritt (und Methoden entwickeln, mit denen man die bekannten Lösungsformeln für Polynome vom Grad 3 und vom Grad 4 systematisch herleiten kann). Siehe auch die Einführung des Buchs [Bo-A] von Bosch, in dem das Thema ausführlich und auch aus historischer Sicht beleuchtet wird.
- Wir werden verschiedene klassische Konstruktionsprobleme (»Konstruktion mit Zirkel und Lineal«) diskutieren und zum Beispiel sehen, dass die Verdoppelung des Würfels nicht möglich ist, dass der Satz von Lindemann über die Transzendenz von π zeigt, dass die *Quadratur des Kreises* unmöglich ist, und ein Kriterium dafür beweisen, dass das regelmäßige n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
- Einen konzeptionellen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes geben, eines Grundpfeilers der Zahlentheorie, das in der Klassenkörpertheorie weitreichend verallgemeinert wird und insofern als Wegweiser auch für aktuelle Forschung in Zahlentheorie und benachbarten Gebieten betrachtet werden kann.



Sie sehen ja aus, als hätten Sie die Quadratur des Kreises gelöst!

Dies sagte ([angeblich ...^a](#)) Oberstleutnant von dem Busche zu seinem Freund [Ferdinand Lindemann^b](#), als er ihn eines Abends in außergewöhnlich guter Stimmung antraf. Der Grund für Lindemanns gute Laune war, dass er just an diesem Tag die Transzendenz (Definition 4.5) der Kreiszahl π bewiesen hatte. Wie wir sehen werden (und wie Lindemann natürlich wusste) folgt daraus mit der Theorie der Körpererweiterungen, wie wir sie in der Vorlesung kennenlernen werden, dass die »Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal« nicht möglich ist (Satz 4.35).

^a<https://epub.ub.uni-muenchen.de/4546/1/4546.pdf>

^bhttps://de.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_von_Lindemann

1.3. Vorkenntnisse

Gute Kenntnisse der Linearen Algebra werden benötigt, allerdings weniger die »Feinheiten« der Theorie von Vektorräumen und ihrer Homomorphismen (auch wenn der Dimensionsbegriff, mit dem wir den *Grad* einer Körpererweiterung definieren werden, wichtig ist und wir auch auf die Eigenwerttheorie für Vektorraumendomorphismen zurückgreifen werden), sondern vor allem:

- der Begriff der Gruppe,
- der Begriff des (kommutativen) Rings und des Körpers, und zum Beispiel des Polynomrings, des Quotientenkörpers eines Integritätsrings und des faktoriellen Rings,
- die Konstruktion des Quotienten einer Gruppe nach einem Normalteiler und eines Rings nach einem Ideal (und seine Eigenschaften, vor allem der Homomorphiesatz).



Menschen, die von der Algebra nichts wissen, können sich auch nicht die wunderbaren Dinge vorstellen, zu denen man mit Hilfe der genannten Wissenschaft gelangen kann.

G. W. Leibniz

Auch wenn wir die in der Linearen Algebra schon behandelten Themen teilweise wiederholen werden, werden diese ziemlich schnell abgehandelt, und es ist wichtig, dass Sie, was diese Begriffe angeht, schnell »arbeitsfähig« sind, also mit diesen Begriffen ohne langes Nachdenken umgehen können, weil wir weiter darauf aufbauen werden. Das gilt in besonderem Maße für die Quotienten von Gruppen und Ringen. Diese spielen in allen Kapiteln eine sehr wichtige Rolle – wiederholen Sie gegebenenfalls noch einmal, was wir in der Linearen Algebra dazu schon gelernt haben. Die Bildung des Quotienten eines Vektorraums nach einem Untervektorraum kann hier vielleicht auch noch einmal nützlich sein, weil sie besser geometrisch veranschaulicht werden kann.

Als konkrete Beispiele von Körpern sollten Ihnen \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} und die Körper \mathbb{F}_p (p eine Primzahl) geläufig sein.

Aus der Analysis benötigen wir nicht viel. In Abschnitt 5.5.1 benutzen wir den Zwischenwertsatz aus der reellen Analysis. In der zweiten Vorlesungshälfte ist es nützlich, grundlegende Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ zu kennen; insbesondere werden uns die sogenannten n -ten Einheitswurzeln $\exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}_{>0}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$) begegnen, die so heißen weil es genau die Zahlen in \mathbb{C} sind, deren n -te Potenz gleich 1 ist.

Gruppen

2.1. Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Untergruppen

Wir beginnen die Vorlesung Algebra damit, den Begriff der Gruppe, den wir in der Linearen Algebra bereits kennengelernt haben, etwas systematischer und ausführlicher zu studieren.

2.1.1. Vorkenntnisse. Sie sollten jedenfalls die Definition einer Gruppe, von kommutativen bzw. abelschen Gruppen, von Gruppenhomomorphismen und -isomorphismen, und von Kern und Bild eines Gruppenhomomorphismus kennen. Beispiele für Gruppen, die in der Linearen Algebra eine Rolle gespielt haben, sind insbesondere die symmetrischen Gruppen S_n und die allgemeine und spezielle lineare Gruppe über einem Körper K , $GL_n(K)$ und $SL_n(K)$. Wichtige Gruppenhomomorphismen waren die Signumabbildung $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{1, -1\}$ sowie die Determinante $GL_n(K) \rightarrow K^\times$. Schauen Sie gegebenenfalls noch einmal in die Skripte zur LA1 (Kapitel LA1.8) und LA2 (Abschnitt LA2.18.3).

Für Gruppen G und H bezeichnen wir mit $\text{Hom}(G, H)$ (oder mit $\text{Hom}_{\text{Gruppen}}(G, H)$, wenn wir betonen wollen, dass wir Homomorphismen *von Gruppen* betrachten) die Menge aller Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow H$.

Wir haben gezeigt, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er bijektiv ist, und dass ein Gruppenhomomorphismen genau dann injektiv ist, wenn er trivialen Kern hat.

Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt eine Untergruppe, wenn H nicht leer ist und bezüglich der Gruppenverknüpfung und bezüglich der Bildung des Inversen abgeschlossen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Verknüpfung auf G auf H eine Verknüpfung induziert, für die die Gruppenaxiome erfüllt sind.

Der Durchschnitt von Untergruppen einer Gruppe ist wieder eine Untergruppe. Ist $M \subseteq G$ eine Teilmenge einer Gruppe G , so ist also der Durchschnitt aller Untergruppen von G , die M enthalten, eine Untergruppe von G , und zwar die kleinste Untergruppe, die M enthält. Wir bezeichnen sie mit $\langle M \rangle$ und nennen sie die *von M erzeugte Untergruppe*.

Ein wichtiger Spezialfall, den wir in Abschnitt 2.4 genauer untersuchen werden, ist der, dass M aus einem einzigen Element $g \in G$ besteht. In diesem Fall ist (für multiplikativ geschriebenes G)

$$\langle g \rangle := \langle \{g\} \rangle = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge aller Potenzen $1 = g^0, g, g^2, g^3, \dots, g^{-1}, g^{-2} := (g^{-1})^2, \dots$ von g . Dabei kann es natürlich, je nach Gruppe und gewähltem Element, passieren, dass einige dieser Potenzen gleich sind (und dann ist $\langle g \rangle$ eine endliche Menge).

Wir schreiben, wenn nichts anderes gesagt wird, in diesem Kapitel Gruppen multiplikativ, schreiben also die Gruppenverknüpfung als Multiplikation ($g \cdot h$ oder einfach gh). (Gruppen wie \mathbb{Z} und die Quotienten \mathbb{Z}/n sind aber natürlich Gruppen bezüglich der Addition und werden auch additiv geschrieben.)

2.1.2. Beispiele von Gruppen. Allgemein und besonders in der Algebra-Vorlesung sind Gruppen wichtig, die aus Bijektionen einer Menge auf sich bzw. aus den Automorphismen eines Objekts bestehen. Auch aus historischer Sicht war die Betrachtung solcher Bijektionen entscheidend für die Entwicklung des Gruppenbegriffs.

BEISPIEL 2.1 (Gruppen bijektiver Abbildungen). (1) Sei X eine Menge. Die Menge $\text{Bij}(X)$ aller bijektiven Abbildungen $X \rightarrow X$ ist mit der Komposition von Abbildungen $\text{Bij}(X) \times \text{Bij}(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$ als Verknüpfung eine Gruppe.

(2) Ist speziell $X = \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir $S_n := \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$ die *symmetrische Gruppe*. Siehe auch Abschnitt 2.5. ◇

Als Variante der vorherigen Beispielklasse können wir sogenannte Automorphismengruppen von Objekten betrachten, die eine zusätzliche Struktur haben, die zu einem Begriff von Homomorphismus führt.

BEISPIEL 2.2 (Automorphismengruppen). Zu jedem Homomorphismusbegriff (also für Gruppen, Ringe, Vektorräume) haben wir den Begriff von Isomorphismen (d.h. Homomorphismen, die einen Umkehrhomomorphismus besitzen) und Automorphismen (d.h. Isomorphismen, deren Definitions- und Wertebereich übereinstimmen).

Für ein Objekt X mit der gegebenen Struktur (also zum Beispiel eine Gruppe X ; oder einen Vektorraum X über einem Körper) setzen wir

$$\text{Aut}(X) = \{f: X \rightarrow X; f \text{ Automorphismus}\}.$$

Die Verkettung von Automorphismen von X ist wieder ein Automorphismus, die Identitätsabbildung von X ist ein neutrales Element bezüglich der Verkettung, und jeder Automorphismus besitzt nach Definition ein Inverses bezüglich der Verkettung. Daher ist $\text{Aut}(X)$ bezüglich der Verkettung von Abbildungen eine Gruppe, die sogenannte Automorphismengruppe von X .

Wenn erforderlich, können wir die Art von Homomorphismen, die wir betrachten möchten, als Index angeben, zum Beispiel $\text{Aut}_{\text{Gruppen}}(X)$ oder $\text{Aut}_{K\text{-Vektorräume}}(X)$. Teilweise sind für diese Automorphismengruppen auch andere Schreibweisen gebräuchlich, zum Beispiel wird die Automorphismengruppe eines K -Vektorraums V manchmal mit $GL_K(V)$ bezeichnet.

Analog können wir beliebige Abbildungen zwischen Mengen als »Mengenhomomorphismen« betrachten; die »Mengenisomorphismen«, also die Abbildungen, die eine Umkehrabbildung besitzen, sind genau die bijektiven Abbildungen. Mit der entsprechenden Definition erhalten wir als »Automorphismengruppe« der Menge X die Gruppe $\text{Bij}(X)$ der Bijektionen $X \rightarrow X$. (Diese Sichtweise ist natürlich Kontext von Kategorien, siehe (Ergänzungs-)Abschnitt LA2.18.8.1.) ◇

Ein Spezialfall, mit dem wir uns später ausführlich beschäftigen werden, ist die Automorphismengruppe einer Körpererweiterung (die wir unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen die *Galois-Gruppe* der Erweiterung nennen werden).

BEMERKUNG 2.3 (Galois-Gruppen). Sei L ein Körper. Die Menge $\text{Aut}(L)$ aller Ringautomorphismen $L \xrightarrow{\sim} L$ ist eine Gruppe (mit der Komposition von Automorphismen als Gruppenverknüpfung). Ist $K \subseteq L$ ein Teilkörper, dann ist die Teilmenge

$$\text{Aut}_K(L) := \{\sigma \in \text{Aut}(L); \sigma(x) = x \text{ für alle } x \in K\} \subseteq \text{Aut}(L).$$

eine Untergruppe von $\text{Aut}(L)$. Wir nennen $\text{Aut}_K(L)$ die Automorphismengruppe der Erweiterung L/K .

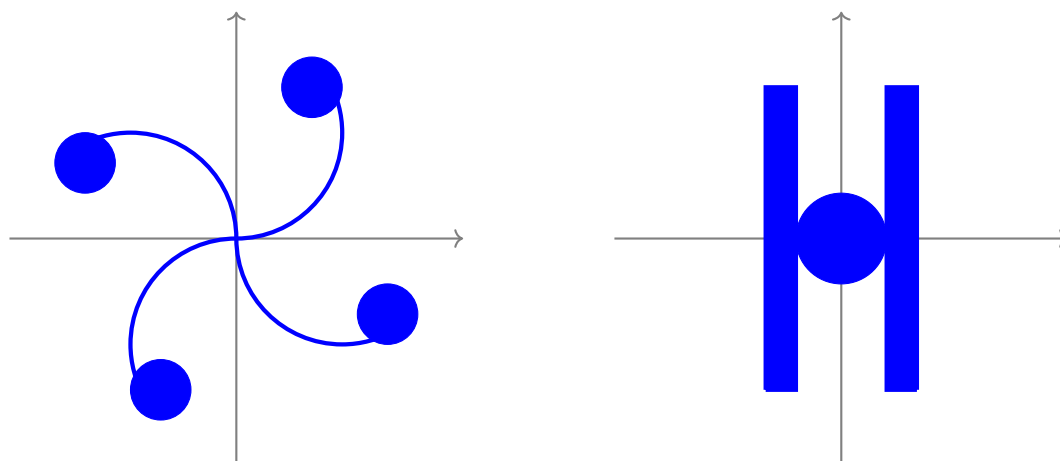
Zum Beispiel hat die Gruppe $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ genau zwei Elemente: die Identitätsabbildung und die komplexe Konjugation. (Warum gibt es keine weiteren?) \diamond

BEISPIEL 2.4. Eine weitere Variante von Gruppen, die aus Bijektionen eines Objekts bestehen, sind *Symmetriegruppen* von Teilmengen von \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 oder höherdimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen, oder allgemeiner von Teilmengen eines Vektorraums V über einem beliebigen Körper K . Für $M \subseteq V$ nennen wir den Stabilisator

$$\text{Stab}(M) = \{f \in \text{Aut}_K(V); f(M) = M\}$$

von M in der Automorphismengruppe von V die Symmetriegruppe von M . Im Fall des Standardvektorraums $V = K^n$ können wir die Symmetriegruppe von M auch als Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL_n(K)$ betrachten.

Den Begriff der Gruppe kann man als den mathematischen Ansatz betrachten, Symmetrien zu beschreiben. Zum Beispiel hat die links abgebildete Teilmenge von \mathbb{R}^2 Symmetriegruppe $\mathbb{Z}/4$ (die »Symmetrien« sind die Drehungen um Vielfache von 90°), die rechts abgebildete Teilmenge hat Symmetriegruppe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ (die Symmetrien sind neben der identischen Abbildungen die Spiegelungen an x - und y -Achse und ihre Verkettung, also die Punktspiegelung am Ursprung). In beiden Fällen gibt es 4 Symmetrien (einschließlich der Identität), und die Gruppenstruktur ermöglicht eine präzise Beschreibung. Gruppen, die nicht zu einer Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ isomorph sind, können nicht die Symmetriegruppe einer Teilmenge von \mathbb{R}^2 sein; ein Beispiel dafür ist die Quaternionengruppe (siehe Ergänzung 2.8, Ergänzung ??).



Ein konkretes Beispiel, das wir in der Linearen Algebra (wenigstens am Rande, siehe Abschnitt LA1.8.1.6) gesehen haben, sind die Diedergruppen: D_{2n} ist die Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ aller derjenigen Automorphismen $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, die ein fixiertes regelmäßiges n -Eck (das den Ursprung als Mittelpunkt hat) auf sich abbilden. Sie hat $2n$ Elemente, und zwar n Drehungen und n Spiegelungen.

Vergleiche auch Abschnitt 2.3. \diamond

BEISPIEL 2.5 (Produkt von Gruppen). (I) Sind G und H Gruppen, so können wir das Produkt

$$G \times H = \{(g, h); g \in G, h \in H\}$$

bilden. Mit der komponentenweisen Verknüpfung

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

bildet dieses wieder eine Gruppe. Die Projektionen

$$p_G: G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto g, \quad \text{und} \quad p_H: G \times H \rightarrow H, (g, h) \mapsto h,$$

sind (surjektive) Gruppenhomomorphismen. Das Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft des Produkts, d.h. die Abbildung

$$\text{Hom}(T, G \times H) \rightarrow \text{Hom}(T, G) \times \text{Hom}(T, H), \quad \varphi \mapsto (p_G \circ \varphi, p_H \circ \varphi),$$

ist eine Bijektion. Siehe Abschnitt LA2.18.1.1.

- (2) Allgemeiner können wir für jede Menge I und jede Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Gruppen das Produkt $\prod_{i \in I} G_i$ bilden. Auch hier haben wir die Projektionen auf die einzelnen Faktoren des Produkts, und es ist eine universelle Eigenschaft erfüllt.

◇

In der Algebra-Vorlesung werden im Vergleich zur Linearen Algebra endliche Gruppen eine größere Rolle spielen. Wir sammeln daher einige Beispiele.

BEISPIEL 2.6 (Gruppen mit wenigen Elementen). Wir geben für $n \leq 7$ eine »vollständige Liste bis auf Isomorphie« der Gruppen mit n Elementen an, das bedeutet, eine Liste $G_1, G_2, \dots, G_{r(n)}$ von Gruppen, so dass jede Gruppe mit n Elementen zu genau einer der Gruppen aus dieser Liste isomorph ist.

Die Beweise, dass die Listen jeweils vollständig sind, verschieben wir auf später (bzw. auf die Übungen).

Die Gruppe G schreiben wir in diesem Beispiel stets multiplikativ.

- (1) $\#G = 1$. Die »einzige« Gruppe mit genau einem Element ist die sogenannte *triviale Gruppe* $\{1\}$ mit $1 \cdot 1 = 1$, d.h.: für jede Gruppe G , die genau ein Element a enthält, ist $G \rightarrow \{1\}$, $a \mapsto 1$ ein Isomorphismus von Gruppen.
- (2) $\#G = 2$. Ist $G = \{a, b\}$ eine Gruppe mit genau zwei Elementen, wobei ohne Einschränkung a das neutrale Element bezeichne, so ist $G \rightarrow \mathbb{Z}/2$, $a \mapsto 0, b \mapsto 1$, ein Gruppenisomorphismus (wobei wir $\mathbb{Z}/2$ als Gruppe bezüglich der Addition verstehen).
- (3) $\#G = p$, p Primzahl. Dann ist G isomorph zur (additiven) Gruppe \mathbb{Z}/p , insbesondere ist G also kommutativ. Sei $g \in G \setminus \{1\}$. Dann ist

$$\mathbb{Z}/p \rightarrow G, i \mapsto g^i$$

ein Isomorphismus von der (additiven) Gruppe \mathbb{Z}/p auf die Gruppe G .

Es gibt also bis auf Isomorphie nur eine einzige Gruppe der Ordnung p . Siehe Beispiel 2.22.

- (4) $\#G = 4$. In diesem Fall gibt es genau zwei nicht-isomorphe Gruppen, und zwar die Gruppen $\mathbb{Z}/4$ und $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ (letztere nennt man auch die *Kleinsche Vierergruppe*). Dass die beiden Gruppen nicht isomorph sind, ist klar, weil $\mathbb{Z}/4$ ein Element der Ordnung 4 enthält, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ aber nur Elemente der Ordnung 1 und 2 (siehe 2.12).
- (5) $\#G = 6$. Auch in diesem Fall gibt es zwei Gruppen auf der Liste, nämlich $\mathbb{Z}/6$ und die symmetrische Gruppe S_3 . Weil S_3 nicht kommutativ ist, sind diese beiden Gruppen offenbar nicht zueinander isomorph.

◇

BEISPIEL 2.7 (Endliche abelsche Gruppen). (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist \mathbb{Z}/n eine kommutative Gruppe mit n Elementen.

- (2) Für $r \in \mathbb{N}$ und $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_{>0}$ ist

$$\mathbb{Z}/n_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r$$

eine abelsche Gruppe (mit $n_1 \cdot \cdots \cdot n_r$ Elementen). Im allgemeinen ist diese nicht isomorph zu einer Gruppe der Form \mathbb{Z}/n , zum Beispiel ist $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ nicht von dieser Form.

(Manchmal allerdings doch; der chinesische Restsatz, Satz LA2.15.61, liefert für paarweise teilerfremde Zahlen n_1, \dots, n_r einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/n_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r \cong \mathbb{Z}/n_1 \cdots n_r$.)

- (3) Der *Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen* besagt, dass jede endliche abelsche Gruppe isomorph ist zu einer Gruppe der Form in (2). Genauer gilt: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, dann existieren natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_r > 1$ mit

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r$$

und so dass $n_1 \mid n_2, n_2 \mid n_3, \dots, n_{r-1} \mid n_r$, und n_1, \dots, n_r sind durch G eindeutig bestimmt.

Siehe Korollar LA2.18.93 in den Ergänzungen des LA2-Skripts.

◇

ERGÄNZUNG 2.8 (Gruppen mit 8 Elementen). Für Gruppen mit 8 Elementen ist es schon ein bisschen komplizierter, eine »Klassifikation (bis auf Isomorphie)« wie in Beispiel 2.6 anzugeben.

Das Ergebnis ist die folgende Liste:

- (1) $\mathbb{Z}/8$,
- (2) $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$,
- (3) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$,
- (4) die Diedergruppe D_8 , siehe Beispiel 2.4, Abschnitt LA1.8.1.6.
- (5) die *Quaternionengruppe* Q , d.h. die multiplikative Untergruppe der Einheitengruppe \mathbb{H}^\times der Hamiltonschen Quaternionen (Ergänzung LA1.4.11), die von $1, i, j, k$ erzeugt wird. Es ist also

$$Q = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

mit neutralem Element 1 und

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= 1, & (-1) \cdot i &= i \cdot (-1) = -i, & (-1) \cdot j &= j \cdot (-1) = -j, & (-1) \cdot k &= k \cdot (-1) = -k, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1, & ij &= k. \end{aligned}$$

Alle anderen Produkte ergeben sich daraus, zum Beispiel

$$kj = (ij)j = ij^2 = -i, \quad ji = (ij)^{-1} = k^{-1} = -k.$$

□ Ergänzung 2.8

BEISPIEL 2.9. Für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ ist $GL_n(\mathbb{F}_p)$, die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen über \mathbb{F}_p , eine endliche Gruppe. Können Sie »ausrechnen« (d.h. eine geschlossene Formel dafür angeben), wie viele Elemente $GL_n(\mathbb{F}_p)$ hat? ◇

2.2. Der Quotient nach einem Normalteiler

2.2.1. Nebenklassen und der Satz von Lagrange. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Die Teilmengen von G der Form

$$gH = \{gh; h \in H\}, \quad g \in G,$$

nennen wir die *Linksnebenklassen* von H in G . Es handelt sich um die Äquivalenzklassen bezüglich der durch

$$g \sim g' \iff g^{-1}g' \in H$$

gegebenen Äquivalenzrelation. Wir schreiben G/H für die Menge aller Linksnebenklassen von H in G und nennen gH die (*Links-*)*Nebenklasse* oder *Restklasse* von g .

Für $g \in G$ ist die Multiplikation mit g eine Bijektion $H \rightarrow gH$. Im Fall einer endlichen Gruppe ergibt sich daraus der folgende Satz.

SATZ 2.10 (Satz von Lagrange). Sei G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt

$$\#G = \#H \cdot \#(G/H).$$

In diesem Zusammenhang definieren wir die folgenden Begriffe.

DEFINITION 2.11. (1) Sei G eine (endliche) Gruppe. Die Anzahl $\#G$ der Elemente von G nennt man auch die *Ordnung* von G . (Manchmal schreibt man $\text{ord}(G) = \#G$.) Ist G nicht endlich, so ist die Ordnung von G unendlich (in Zeichen: ∞).

(2) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe. Die Anzahl der Elemente von G/H (in $\mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty\}$) nennt man auch den *Index* der Untergruppe H in G . Wir schreiben auch $[G : H] = \# G/H$.

–

Analog kann man auch *Rechtsnebenklassen*, also Teilmengen der Form Hg betrachten. Wir bezeichnen mit $H \backslash G$ die Menge der Rechtsnebenklassen. Die Abbildung $gH \mapsto Hg^{-1}$ ist eine Bijektion $G/H \rightarrow H \backslash G$, insbesondere haben diese beiden Mengen dieselbe Mächtigkeit (so dass man den Index auch als die Anzahl der Rechtsnebenklassen definieren könnte). (Warum ist die Abbildung $gH \mapsto Hg^{-1}$ wohldefiniert und bijektiv? Wie ist es mit $gH \mapsto Hg$?)

DEFINITION 2.12. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die *Ordnung* $\text{ord}(g)$ von g ist die kleinste positive ganze Zahl n mit $g^n = 1$, oder ∞ wenn kein solches n existiert.

–

LEMMA 2.13. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann gilt

$$\text{ord}(g) = \#\langle g \rangle.$$

BEWEIS. Es gilt $\langle g \rangle = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}$, denn die rechte Seite ist die kleinste Untergruppe von G , die g enthält. Wenn $\text{ord}(g)$ unendlich ist, dann sind die Elemente $g^i, i \in \mathbb{Z}$ alle verschieden; denn aus $g^i = g^j$ folgt $g^{i-j} = 1$.

Sei nun $m = \text{ord}(g)$ endlich. Es gilt also $g^m = 1$ und $g^d \neq 1$ für alle $1 \leq d < m$. Es folgt $g^{m-1} = g^{-1}$, und dass $\{1, g, \dots, g^{m-1}\}$ eine *Untergruppe* von G mit m Elementen ist. Keine echte Teilmenge dieser Menge ist eine Untergruppe, die g enthält, deshalb ist $\langle g \rangle = \{1, g, \dots, g^{m-1}\}$ und $\#\langle g \rangle = m = \text{ord}(g)$. \square

Aus dem Satz von Lagrange folgt damit:

KOROLLAR 2.14. Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Dann gilt $\text{ord}(g) \mid \#G$.

Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe G und eines Teilers der Gruppenordnung $\#G$, der nicht die Ordnung eines Gruppenelements ist. Immerhin gilt aber Lemma 2.23, siehe auch Ergänzung 2.83.

2.2.2. Normalteiler und der Quotient nach einem Normalteiler. Schon in der Linearen Algebra haben wir gelernt (Abschnitt LA2.18.3), dass nicht jede Untergruppe einer Gruppe der Kern irgendeines Gruppenhomomorphismus sein muss, und man demzufolge auch nicht den Quotienten nach beliebigen Untergruppen bilden kann, sondern nur nach sogenannten *Normalteilern*. Wir beginnen mit der Wiederholung der Definition dieses Begriffs.

DEFINITION 2.15. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt *Normalteiler*, wenn für alle $g \in G$ die Links- und Rechtsnebenklasse von g bezüglich H übereinstimmen, d.h.

$$gH = Hg.$$

—

Wir sammeln einige einfache Aussagen, die wir benutzen werden und in der Linearen Algebra noch nicht bewiesen haben. Wir schreiben für $g, g' \in G$ und eine Untergruppe H analog zur Nebenklassenschreibweise auch

$$gHg' = \{ghg'; h \in H\}$$

und speziell

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}.$$

Für jede Untergruppe H ist die Menge gHg^{-1} ebenfalls eine Untergruppe von G , die wir eine zu H *konjugierte* Untergruppe nennen. Sie ist das Bild unter der *Konjugation mit g* , d.h. unter dem Gruppenisomorphismus $G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$. Siehe auch Beispiel 2.30.

Ist G eine abelsche Gruppe, dann ist jede Untergruppe von G ein Normalteiler. In jeder Gruppe G sind $\{1\}$ und G Normalteiler. Sind G und H Gruppen, so ist $G \times \{1\} \subseteq G \times H$ ein Normalteiler, und ebenso natürlich $\{1\} \times H \subseteq G \times G$; entsprechendes gilt für beliebige Produkte von Gruppen. Die Untergruppe $\{\text{id}, (12)\} \subseteq S_3$ ist (warum?) kein Normalteiler. Ist $H \subseteq G$ der Kern irgendeines Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow G'$, so ist H ein Normalteiler von G (wie aus Teil (2) des folgenden Lemmas folgt).

LEMMA 2.16. Seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

- (1) Wenn $gH \subseteq Hg$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist H ein Normalteiler.
- (2) Wenn $gHg^{-1} \subseteq H$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist H ein Normalteiler.
- (3) Wenn $H \subseteq gHg^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist H ein Normalteiler.
- (4) Das Bild eines Normalteilers unter einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist ein Normalteiler.
- (5) Das Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ist ein Normalteiler.
- (6) Ist $\pi: G \rightarrow G'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, dann sind die beiden Abbildungen $H \mapsto \pi(H)$ und $H' \mapsto \pi^{-1}(H')$ zueinander invers und induzieren eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Normalteiler von G , die $\text{Ker}(\pi)$ enthalten und der Menge der Normalteiler von G' .

Die Bijektion in (6) nennen wir *inklusionserhaltend* weil für $H_1, H_2 \subseteq G$ genau dann $H \subseteq H'$ gilt, wenn $\pi(H_1) \subseteq \pi(H_2)$ gilt.

BEWEIS. Zu Teil (1): Es gelte $gH \subseteq Hg$ für alle $g \in G$. Wir müssen zeigen, dass stets auch die umgekehrte Inklusion gilt. Wenn wir die ursprüngliche Aussage auf g^{-1} anwenden, erhalten wir $g^{-1}H \subseteq Hg^{-1}$, und das impliziert, wenn wir »von links und rechts mit g multiplizieren«, dass $Hg \subseteq gH$ gilt, wie gewünscht.

Teile (2) und (3) kann man mit demselben Argument beweisen. Man beachte dazu, dass $gH \subseteq Hg$ äquivalent ist zu $gHg^{-1} \subseteq H$ und zu $H \subseteq g^{-1}Hg$, und entsprechend natürlich für die Gleichheit von Mengen anstelle der Inklusion.

Teile (4) und (5) sind nicht sehr schwierig; wir lassen den Beweis als Übung. Teil (6) folgt dann leicht aus (4) und (5). \square

SATZ 2.17 (Quotient einer Gruppe nach einem Normalteiler). *Seien G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann ist die Abbildung*

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H, \quad (gH, g'H) \mapsto gg'H,$$

wohldefiniert und definiert auf G/H die Struktur einer Gruppe, die wir den Quotienten der Gruppe G nach dem Normalteiler H nennen.

Die Abbildung $\pi: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\text{Ker}(\pi) = H$, den wir die kanonische Projektion nennen.

Siehe auch Abschnitt LA2.18.3. Die folgenden beiden Lemmata geben noch einmal eine etwas andere Interpretation der Quotientenkonstruktion (und des Normalteilerbegriffs).

LEMMA 2.18. *Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $f: G \rightarrow X$ eine surjektive Abbildung. Dann gibt es höchstens eine Verknüpfung $X \times X \rightarrow X$, die auf X die Struktur einer Gruppe definiert und so dass f ein Gruppenhomomorphismus ist.*

BEWEIS. Das ist klar, denn es muss $f(g) \cdot f(h) = f(gh)$ für alle $g, h \in G$ gelten, und wegen der Surjektivität von f hat jedes Element von X die Form $f(g)$ für ein geeignetes $g \in G$. \square

LEMMA 2.19. *Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $\pi: G \rightarrow G/H$ die (surjektive) Abbildung, die jedem $g \in G$ seine Nebenklasse gH zuordnet.*

Es gibt genau dann eine Gruppenstruktur auf G/H , so dass π ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn H ein Normalteiler in G ist (und diese ist nach dem vorherigen Lemma eindeutig bestimmt).

BEWEIS. Dass für einen Normalteiler H eine Gruppenstruktur auf G/H existiert, zeigt man durch eine leichte Rechnung (die wir in der Linearen Algebra 2 durchgeführt haben). Wenn andererseits eine Gruppenstruktur existiert, für die π ein Homomorphismus ist, so sieht man leicht, dass $\text{Ker}(\pi) = H$ gilt, und als Kern eines Gruppenhomomorphismus muss H ein Normalteiler sein. \square

BEISPIEL 2.20. Sei $G = \mathbb{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$n\mathbb{Z} = \{kn; k \in \mathbb{Z}\},$$

die Menge aller Vielfachen von \mathbb{Z} , eine Untergruppe von \mathbb{Z} . Ist umgekehrt $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $H = n\mathbb{Z}$. (Definieren Sie, falls $H \neq \{0\}$ gilt, n als ein Element $\neq 0$ von H , dessen Absolutbetrag unter allen Elementen von $H \setminus \{0\}$ minimal ist, und benutzen Sie Division mit Rest, um $H = n\mathbb{Z}$ zu zeigen. Oder benutzen Sie, dass jede Untergruppe von \mathbb{Z} auch ein Ideal im Ring \mathbb{Z} ist und dass \mathbb{Z} ein Hauptidealring ist. In diesem »schnelleren« Beweis ist aber das direkte Argument auch (wo?) versteckt.)

Wenn $n = 0$ ist, so ist $n\mathbb{Z} = \{0\}$ und die kanonische Projektion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n$ ist in diesem Fall ein Isomorphismus. Für $n \neq 0$ gilt $n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$ und der Quotient \mathbb{Z}/n hat $|n|$ Elemente. \diamond

Das wichtigste Werkzeug, um mit dem Quotienten zu arbeiten ist der Homomorphiesatz (oder mit anderen Worten die »universelle Eigenschaft« des Quotienten).

SATZ 2.21 (Homomorphiesatz für Gruppen). *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Sei $\pi: G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion auf den Quotienten. Sei T eine Gruppe und $f: G \rightarrow T$ ein Gruppenhomomorphismus.*

- (1) *Wenn $H \subseteq \text{Ker } f$ gilt, dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\varphi: G/H \rightarrow T$ mit $\varphi \circ \pi = f$.*
- (2) *Existiert φ mit $\varphi \circ \pi = f$, so folgt $H \subseteq \text{Ker } f$. Sind f mit $H \subseteq \text{Ker } f$ und φ wie in (1), so gilt: $\text{Im } \varphi = \text{Im } f$. Die Abbildung φ ist genau dann injektiv wenn $H = \text{Ker } f$ gilt, genauer gilt stets $\text{Ker } \varphi = \text{Ker}(f)/H$.*

BEISPIEL 2.22. Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p , also mit $\#G = p$. Dann sind $\{1\}$ und G die einzigen Untergruppen von G , denn nach dem Satz von Lagrange muss jede Untergruppe als Ordnung einen Teiler von $\#G$ haben, also 1 oder p . Insbesondere gilt für jedes $g \in G, g \neq 1$, dass $\langle g \rangle = G$ ist, denn die linke Seite ist jedenfalls eine nicht-triviale Untergruppe von G .

Man sieht dann leicht, dass die Abbildung $\mathbb{Z}/p \rightarrow G, i \mapsto g^i$, ein Gruppenisomorphismus ist. Bis auf Isomorphie ist also \mathbb{Z}/p die einzige Gruppe mit p Elementen.

Es ist nicht sehr schwer zu sehen, dass eine Gruppe G , in der $\{1\}$ und G die einzigen Untergruppen sind, die Form \mathbb{Z}/p für eine Primzahl p haben muss, siehe Beispiel 2.46. \diamond

LEMMA 2.23. Sei G eine endliche abelsche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $\#G$ teilt. Dann existiert ein Element $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = p$.

BEWEIS. Ist $g \in G$ ein Element, dessen Ordnung $d := \text{ord}(g)$ von p geteilt wird, so sieht man leicht, dass $g^{d/p}$ Ordnung p hat.

Wir führen nun Induktion nach $\#G$, um zu zeigen, dass für jeden Primteiler p der Gruppenordnung ein Element existiert, dessen Ordnung von p geteilt wird. Ist G die triviale Gruppe, so ist nichts zu zeigen. Sei also nun $G \neq 1$ und p eine Primzahl, die $\#G$ teilt. Sei $g \in G$ irgendein Element mit $\text{ord}(g) > 1$. Gilt $p \mid \text{ord}(g)$, so sind wir nach dem oben Gesagten fertig. Andernfalls bilden wir den Quotienten $G/\langle g \rangle$ nach dem Normalteiler $\langle g \rangle$. Wegen $\#G = \#(G/\langle g \rangle) \cdot \text{ord}(g)$ gilt dann $p \mid \#(G/\langle g \rangle)$, nach Induktionsvoraussetzung existiert daher ein Element $\bar{h} \in G/\langle g \rangle$, dessen Ordnung von p geteilt wird. Sei nun $h \in G$ ein Element mit Restklasse \bar{h} . Dann ist $\langle \bar{h} \rangle$ ein Quotient von $\langle h \rangle$, und es folgt $\text{ord}(\bar{h}) \mid \text{ord}(h)$ und damit $p \mid \text{ord}(h)$. \square

Es ist wichtig, dass hier p eine Primzahl ist. Wo geht das obige Argument schief, wenn man diese Voraussetzung fallenlässt? Die Voraussetzung, dass G abelsch sei, ist aber nicht erforderlich für die Gültigkeit der Aussage (allerdings schon (warum?) für den hier gegebenen Beweis). Siehe Ergänzung 2.83.

KOROLLAR 2.24 (Isomorphiesatz). Seien G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler.

- (1) Die Menge $HN = \{hn; h \in H, n \in N\}$ ist eine Untergruppe von G und zwar die von $H \cup N$ erzeugte Untergruppe von G .
- (2) Es ist N ein Normalteiler von HN und $H \cap N$ ein Normalteiler von H und es gilt $HN/N \cong H/H \cap N$.

BEWEIS. Übung. \square

KOROLLAR 2.25 (Zweiter Isomorphiesatz). Seien G Gruppe, $H, N \subseteq G$ Normalteiler in G mit $N \subseteq H$. Dann ist auch N ein Normalteiler in H , H/N kann in natürlicher Weise als Normalteiler von G/N aufgefasst werden, und es gilt

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

BEWEIS. Die Abbildung $H \rightarrow G \rightarrow G/N$ hat Kern N (insbesondere ist N ein Normalteiler von H) und induziert demnach einen injektiven Gruppenhomomorphismus $H/N \rightarrow G/N$, so dass wir H/N als Untergruppe von G/N betrachten können.

Die kanonische Projektion $G \rightarrow G/H$ faktorisiert über eine Surjektion

$$G/N \rightarrow G/H, \quad gN \mapsto gH,$$

deren Kern genau H/N ist, wie man unmittelbar überprüft. Daraus folgt einerseits, dass H/N ein Normalteiler von G/N ist (als Kern eines Gruppenhomomorphismus), und andererseits folgt mit dem Homomorphiesatz der behauptete Isomorphismus. \square

2.3. Gruppenwirkungen

Wie oben bemerkt, sind »Gruppen von Bijektionen« bzw. allgemeiner *Automorphismengruppen* wichtige Beispiele von Gruppen. Ist G irgendeine Gruppe, so liefert uns »unsere« Definition von Gruppe, also der heutzutage übliche Gruppenbegriff, aber nur eine Verknüpfung auf G mit gewissen Eigenschaften und keine Anhaltspunkte für eine »konkrete Realisierung« der Elemente von G als Bijektionen einer Menge, als Automorphismen oder als »Symmetrien« einer Art. Allerdings ist es oft möglich (und nützlich) für eine gegebene Gruppe zu untersuchen, wie ein solcher Zusammenhang zu einer Gruppe der Form $\text{Bij}(X)$ hergestellt werden kann. Ein offensichtlicher Ansatz ist es, Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow \text{Bij}(X)$ zu betrachten, mit anderen Worten Zuordnungen, die jedem Element von g eine Bijektion $X \rightarrow X$ zuordnen, so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sein müssen. Schreibt man diese aus, erhält man den Begriff der *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe G auf einer Menge X wie in der folgenden Definition.

DEFINITION 2.26. Seien G eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Wirkung* (oder: *Operation*) ist eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ für alle $g, h \in G$ und alle $x \in X$,
- (b) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in X$ (wobei $1 \in G$ das neutrale Element bezeichne).

–

In äquivalenter Weise können wir eine Wirkung von G auf X als einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ betrachten; die Beziehung zwischen den beiden Sichtweisen ist durch $\varphi(g)(x) = g \cdot x$ gegeben. Oft schreibt man statt $g \cdot x$ auch einfach gx (oder benutzt gegebenenfalls ein anderes Symbol).

Bevor wir Beispiele betrachten, führen wir noch die folgenden wichtigen Begriffe ein:

DEFINITION 2.27. Sei $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ eine Gruppenwirkung.

- (1) Die *Bahn* (oder: der *Orbit*) eines Elements $x \in X$ unter der Gruppe G ist die Teilmenge

$$Gx := \{gx; g \in G\} \subseteq X.$$

- (2) Der *Stabilisator* eines Elements x ist die Untergruppe

$$\text{Stab}_G(x) := \{g \in G; gx = x\}$$

von G . Manchmal nennt man diese auch die *Standgruppe* oder die *Isotropiegruppe* von x in G .

- (3) Allgemeiner kann man den *Stabilisator einer Teilmenge* $M \subseteq X$ definieren, dies ist die Untergruppe

$$\text{Stab}_G(M) := \{g \in G; gM = M\}$$

von G . Hier schreiben wir $gM = \{gm; m \in M\} \subseteq X$.

–

Operiert die Gruppe G auf der Menge M und ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so können wir die Operation »auf H einschränken«, d.h. die gegebene Abbildung $G \times M \rightarrow M$ einschränken zu einer Abbildung $H \times M \rightarrow M$ und erhalten so eine Operation von H auf M .

BEISPIEL 2.28. (1) Die symmetrische Gruppe S_n (und entsprechend jede Untergruppe von S_n) operiert auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ durch $\sigma \cdot n = \sigma(n)$.

- (2) Analog zu (1) operiert die Automorphismengruppe eines Objekts auf diesem Objekt, zum Beispiel haben wir für (Standard-)Vektorräume:

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe $GL_n(K)$ operiert auf dem Vektorraum K^n durch Matrizenmultiplikation, d.h. die Operation ist gegeben durch

$$GL_n(K) \times K^n \rightarrow K^n, \quad (g, v) \mapsto gv.$$

Als Gruppenhomomorphismus $GL_n(K) \rightarrow \text{Bij}(V)$ verstanden ist diese Operation (wenn wir invertierbare Matrizen als Automorphismen $K^n \xrightarrow{\sim} K^n$ verstehen) einfach die Inklusion der Gruppe aller *linearen* bijektiven Abbildungen in die Gruppe aller bijektiven Abbildungen.

Ist $M \subset K^n$ eine Teilmenge, so operiert die Gruppe $G := \text{Stab}_{GL_n(K)}(M)$ auf M . (Dies ist ein allgemeines Prinzip, um die Wirkung einer Gruppe einzuschränken.) Siehe auch Abschnitt LAI.8.1.6.

- (3) Ist K ein Körper, V ein K -Vektorraum und G eine Gruppe, so nennen wir eine Operation $\rho: G \rightarrow \text{Bij}(V)$ von G auf V eine *Operation durch Vektorraumautomorphismen*, wenn das Bild von ρ in der Untergruppe $\text{Aut}_K(V)$ aller Vektorraumautomorphismen von V liegt. Mit anderen Worten: Für jedes $g \in G$ ist die Bijektion $V \rightarrow V, v \mapsto gv$, eine lineare Abbildung. Analog kann man Operationen von G auf einer Gruppe X durch Gruppenhomomorphismen oder auf einem Körper durch Körperautomorphismen, usw., betrachten.
- (4) Die Gruppe $\mathbb{Z}/2$ operiert auf \mathbb{C} durch komplexe Konjugation, d.h. wir definieren eine Gruppenoperation $\rho: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{Bij}(\mathbb{C})$ indem wir $\rho(0)$ als die Identitätsabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\rho(1)$ als die komplexe Konjugation $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren. Weil $\sigma \circ \sigma = \text{id}$ ist, ist dies ein Gruppenhomomorphismus.
- (5) Die (additive) Gruppe \mathbb{R} operiert auf \mathbb{R}^2 durch Drehungen, d.h. die Abbildung

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{R}), \quad \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, und die Verkettung mit der Inklusion $GL_2(\mathbb{R}) = \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \subset \text{Bij}(\mathbb{R}^2)$ ist die oben genannte Wirkung. Alle Elemente der Untergruppe $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k; k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ operieren »trivial«, also durch die Identitätsabbildung. Mit anderen Worten: $2\pi\mathbb{Z} \subseteq \text{Ker}(\rho)$. Also erhalten wir nach dem Homomorphiesatz einen Homomorphismus

$$\bar{\rho}: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow GL_2(\mathbb{R}),$$

d.h. eine Wirkung der Gruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ auch \mathbb{R}^2 durch Vektorraumautomorphismen. Die Bahnen dieser Operation sind einerseits die Teilmenge $\{0\}$, die nur aus dem Ursprung besteht, andererseits alle Kreise um den Ursprung (mit Radius > 0). Der Stabilisator von $0 \in \mathbb{R}^2$ ist die gesamte Gruppe, der Stabilisator eines Punktes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die triviale Gruppe $\{0\}$.

◇

BEISPIEL 2.29. Sei K ein Körper und seine $0 \leq r \leq n$ natürliche Zahlen. Sei \mathcal{G} die Menge der r -dimensionalen Untervektorräume des K -Vektorraums K^n . Ist $f: K^n \rightarrow K^n$ ein Vektorraum-Automorphismus und $U \in \mathcal{G}$, so ist $f(U)$ ebenfalls ein Element von \mathcal{G} . Indem wir invertierbare Matrizen als Vektorraum-Automorphismen betrachten, erhalten wir so eine Operation der Gruppe $GL_n(K)$ auf der Menge \mathcal{G} . Was sind die Bahnen dieser Operation? Was ist der Stabilisator des Unterraums, der von den ersten r Standardbasisvektoren erzeugt wird? ◇

BEISPIEL 2.30. Sei G eine Gruppe. Dann ist $G \times G \rightarrow G, g \bullet h := ghg^{-1}$ eine Gruppenwirkung, die *Wirkung durch Konjugation* von G auf sich selbst. (An dieser Stelle ist es natürlich zwingend,

die Operation nicht einfach als Multiplikation zu schreiben, weil sie sonst nicht von der Gruppenmultiplikation unterscheidbar wäre.)

Die Bahnen unter dieser Operation heißen die *Konjugationsklassen* der Gruppe G . Den Stabilisator eines Elements $h \in G$ unter der Konjugationswirkung nennen wir den *Zentralisator* von h und bezeichnen ihn mit Z_h . Es gilt also

$$Z_h = \{g \in G; ghg^{-1} = h\} = \{g \in G; gh = hg\}.$$

Allgemeiner sei für eine Teilmenge $S \in G$ der Zentralisator von S definiert als

$$Z_S = \bigcap_{h \in S} Z_h = \{g \in G; gh = hg \text{ für alle } h \in S\},$$

also als die Untergruppe von G derjenigen Elemente, die mit allen Elementen aus S kommutieren. Den Zentralisator Z_G der ganzen Gruppe G nennt man das *Zentrum* von G . Dies ist eine abelsche Gruppe und ein Normalteiler von G (allerdings besteht für manche Gruppen das Zentrum lediglich aus dem neutralen Element). Dass $Z_G = G$ gilt, ist dazu äquivalent, dass G abelsch ist.

Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so heißt der Stabilisator von H in G bezüglich der Konjugationswirkung der *Normalisator* der Untergruppe H . Dieser wird mit $N_G(H)$ bezeichnet und ist eine Untergruppe von G , die H enthält und in der H ein Normalteiler ist (und zwar die größte solche Untergruppe). Ausgeschrieben gilt also

$$N_G(H) = \{g \in G; gHg^{-1} = H\}.$$

Machen Sie sich den Unterschied zum Zentralisator Z_H klar! \diamond

BEISPIEL 2.31. Sei K ein Körper. Die Gruppe $G = GL_n(K)$ operiert durch Konjugation auf dem Raum $M_n(K)$ der quadratischen Matrizen der Größe n , d.h. $g \in G$ operiert durch $A \mapsto gAg^{-1}$. Der Satz über die Jordansche Normalform beschreibt die Menge der Bahnen dieser Operation. \diamond

LEMMA 2.32. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Sei $x \in X$. Dann induziert die Abbildung $G \rightarrow X, g \mapsto gx$, eine Bijektion $G/\text{Stab}_G(x) \rightarrow Gx$.

BEWEIS. Es ist klar, dass die Abbildung $G \rightarrow X, g \mapsto gx$, das Bild Gx hat, als Abbildung $G \rightarrow Gx$ verstanden also surjektiv ist. Elemente $g, h \in G$ haben genau dann das gleiche Bild unter dieser Abbildung, wenn $gx = hx$, also $h^{-1}gx = x$ oder mit anderen Worten $h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$ gilt. Das ist dazu äquivalent, dass g und h dieselbe Restklasse in $G/\text{Stab}_G(x)$ haben. Daraus folgt die Behauptung. \square

Sei weiterhin G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Sind $x, y \in X$ mit $Gx \cap Gy \neq \emptyset$, etwa $z \in Gx \cap Gy$, so gilt können wir $z = gx = hy$ schreiben und erhalten $y = (h^{-1}g)x \in Gx$ und damit $Gy \subseteq Gx$. Aus Symmetriegründen folgt $Gy = Gx$. Zwei Bahnen sind also entweder disjunkt oder gleich. Mit anderen Worten: Die Menge X ist die disjunkte Vereinigung aller Bahnen.

Die Bahnen sind, wie man leicht überprüft, die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff \text{es existiert } g \in G \text{ mit } y = gx.$$

SATZ 2.33 (Bahnengleichung). Sei G eine Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Sei x_1, \dots, x_r ein Vertretersystem der Bahnen von X auf G , d.h. zu jeder Bahn $B \subseteq X$ in X unter G existiere ein eindeutig bestimmtes i mit $x_i \in B$. Dann gilt

$$\#X = \sum_{i=1}^r \#Gx_i = \sum_{i=1}^r \#(G/\text{Stab}_G(x_i)).$$

BEWEIS. Die erste Gleichheit folgt daraus, dass X die disjunkte Vereinigung aller Bahnen ist. Die zweite Gleichung ergibt sich aus Lemma 2.32. \square

Wir wollen eine Folgerung aus der Bahngleichung angeben, die dafür typisch ist, wie wir sie in Abschnitt 2.7 benutzen werden.

LEMMA 2.34. Sei p eine Primzahl. Sei G eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Sei X eine endliche Menge, auf der G operiert. Es sei

$$X^G = \{x \in X; gx = x \text{ für alle } g \in G\}$$

die Menge der Fixpunkte unter der G -Wirkung. Dann gilt

$$\#X^G \equiv \#X \pmod{p}.$$

BEWEIS. Dass ein Punkt $x \in X$ in X^G liegt, bedeutet gerade, dass er von allen Elementen von G fixiert wird, dass also $\text{Stab}_G(x) = G$ gilt. Diese Elemente bilden jeweils eine eigene Bahn unter der Operation, und es gilt dann $G/\text{Stab}_G(x) = 1$. In der Bahngleichung

$$\#X = \sum_{i=1}^r \#Gx_i = \sum_{i=1}^r \#(G/\text{Stab}_G(x_i))$$

sind alle Summanden $\#(G/\text{Stab}_G(x_i))$, für die $\text{Stab}_G(x_i) \neq G$ gilt, durch p teilbar. Diese können wir also vernachlässigen, wenn wir modulo p rechnen. Also ist

$$\#X \equiv \sum_{x \in X^G} \#(G/\text{Stab}_G(x)) = \sum_{x \in X^G} 1 = \#X^G \pmod{p}.$$

\square

Im speziellen Fall der Wirkung einer endlichen Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation erhalten wir:

SATZ 2.35 (Klassengleichung). Sei G eine endliche Gruppe und sei g_1, \dots, g_r ein Vertretersystem derjenigen Konjugationsklassen in G , die aus mehr als einem Element bestehen. Dann gilt

$$\#G = \#Z_G + \sum_{i=1}^r \#(G/Z_{x_i}).$$

BEWEIS. Dass die Konjugationsklasse eines Elements $g \in G$ aus einem einzigen Element besteht, also die Form $\{g\}$ hat, ist damit gleichbedeutend, dass g mit allen Elementen von G kommutiert, also im Zentrum Z_G der Gruppe G liegt. Die Elemente des Zentrums sind also diejenigen, die für sich genommen eine Bahn bilden. Daher ergibt sich die angegebene Gleichheit unmittelbar aus der Bahngleichung für die Operation von G auf sich selbst durch Konjugation. \square

Auch aus der Klassengleichung können wir eine interessante Folgerung über Gruppen ableiten, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

LEMMA 2.36. Sei p eine Primzahl. Sei G eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz p^r von p mit $r \geq 1$ ist. Dann ist das Zentrum von G nicht die triviale Gruppe.

BEWEIS. Wir schreiben die Klassengleichung für G aus:

$$\#G = \#Z_G + \sum_{i=1}^r \#(G/Z_{x_i}).$$

Nach Definition der x_i gilt $Z_{x_i} \neq 1$ für alle i , so dass $\#(G/Z_{x_i}) > 1$ für alle i folgt. Diese Terme und damit auch die gesamte Summe sind folglich durch p teilbar. Weil $\#G$ auch durch p teilbar ist, folgt $p \mid \#Z_G$. Nun gilt $\#Z_G \geq 1$, weil das Zentrum jedenfalls das neutrale Element von G enthält. Insgesamt folgt $\#Z_G > 1$, wie behauptet. \square

Oft ist die folgende Sprechweise nützlich:

DEFINITION 2.37. Eine Gruppenoperation heißt *transitiv*, wenn es genau eine Bahn gibt. \dashv

Operiert eine Gruppe G transitiv auf einer Menge X und ist x irgendein Element, so erhalten wir mit Lemma 2.32 eine Bijektion $G/\text{Stab}_G(x) \rightarrow X, g \mapsto gx$, also eine Beschreibung von X in Termen von G und der Untergruppe $\text{Stab}_G(x)$.

2.4. Zyklische Gruppen

DEFINITION 2.38. Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn ein Element $g \in G$ existiert, das die Gruppe G erzeugt, mit anderen Worten, so dass

$$G = \langle g \rangle = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}.$$

\dashv

Offenbar ist jede zyklische Gruppe kommutativ. Die Umkehrung ist aber nicht richtig (überlegen Sie sich ein Beispiel!).

BEISPIEL 2.39. (1) Die (additiven) Gruppen \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}/n, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sind zyklisch. (Und wir sehen unten, dass jede zyklische Gruppe zu einer dieser Gruppen isomorph ist.)

(2) Sei G irgendeine Gruppe und $g \in G$. Dann ist $\langle g \rangle = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}$ eine zyklische Untergruppe von G . Insbesondere besitzt jede nicht-triviale Gruppe eine nicht-triviale zyklische Untergruppe.

(3) Seien p eine Primzahl und G eine Gruppe mit p Elementen. Dann ist G zyklisch. (Jedes Element $g \neq 1$ ist ein Erzeuger von G , da $\text{ord}(g)$ ein Teiler von p ist.)

\diamond

SATZ 2.40. Sei G eine Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) die Gruppe G ist zyklisch,
- (ii) es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow G$,
- (iii) G ist isomorph zu einer der Gruppen
 - (1) \mathbb{Z} ,
 - (2) \mathbb{Z}/n für $n \geq 1$.

BEWEIS. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist einfach: Für $G = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}$ ist $\mathbb{Z} \rightarrow G, i \mapsto g^i$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Ist andererseits G eine Gruppe, für die ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ existiert, so gilt $G = \langle \varphi(1) \rangle$.

Aus (ii) folgt (iii), denn ist $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, so impliziert der Homomorphiesatz, dass $G \cong \mathbb{Z}/\text{Ker}(f)$ ist, und die einzigen Untergruppen von \mathbb{Z} sind die Mengen der Form $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, und dabei können wir ohne Einschränkung $n \in \mathbb{N}$ wählen. (Siehe Beispiel 2.20.)

Andererseits sind offenbar die in (iii) genannten Gruppen sämtlich zyklisch, sie werden erzeugt von (der Restklasse von) 1. \square

SATZ 2.41. Untergruppen und Quotienten von zyklischen Gruppen sind zyklisch. Insbesondere gilt: Ist $\varphi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und ist G zyklisch, so sind $\text{Ker}(\varphi)$ und $\text{Im}(\varphi)$ zyklisch.

BEWEIS. Mit Charakterisierung (ii) in Satz 2.40 ist klar, dass Quotienten zyklischer Gruppen zyklisch sind. Ist G zyklisch, $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist $\varphi^{-1}(H) \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und $\varphi^{-1}(H)$ ist entweder die triviale Gruppe oder isomorph zu \mathbb{Z} . In beiden Fällen folgt, dass H zyklisch ist. Der Zusatz folgt aus dem ersten Teil. \square

SATZ 2.42. (1) Die Elemente von \mathbb{Z} , die (jeweils) diese Gruppe erzeugen, sind 1 und -1 .

(2) Sei nun $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $r \in \mathbb{Z}$. Dann sind äquivalent:

- (i) die Restklasse von r ist ein Erzeuger der Gruppe \mathbb{Z}/n ,
- (ii) die Restklasse von r ist eine Einheit im Ring \mathbb{Z}/n ,
- (iii) die Zahlen r und n sind teilerfremd (haben also größten gemeinsamen Teiler 1).

BEWEIS. Teil (1) ist unmittelbar klar. Zu (2): Die Restklasse von r ist genau dann ein Erzeuger von \mathbb{Z}/n , wenn (die Restklasse von) 1 in ihrem Erzeugnis liegt, also wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $ar + bn = 1$. Das ist dazu äquivalent, dass r eine Einheit in \mathbb{Z}/n ist und auch dazu dass r und n teilerfremd sind (siehe auch Satz LA1.4.16). \square

DEFINITION 2.43 (Eulersche φ -Funktion). Die Eulersche φ -Funktion ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}, \quad n \mapsto \#(\mathbb{Z}/n)^\times,$$

mit anderen Worten die Abbildung, für die $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n ist. \dashv

Wir geben einige leicht zu beweisende Eigenschaften der Eulerschen φ -Funktion an. Die Eigenschaften (1) und (2) erlauben es, die Werte von φ für jede (nicht allzu große) natürliche Zahl einigermaßen aufwandslos zu berechnen. Eigenschaft (3) werden wir im Beweis von Theorem 2.47 für ein trickreiches Abzählargument benutzen.

LEMMA 2.44 (Eigenschaften der Eulerschen φ -Funktion). (1) Sind $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ teilerfremd, so gilt $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

(2) Ist p eine Primzahl und $r \in \mathbb{N}_{>0}$, so gilt $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\sum_{1 \leq d \leq n, d|n} \varphi(d) = n.$$

BEWEIS. zu (1). Seien m und n teilerfremd. Der Chinesische Restsatz (Satz LA2.15.61, Satz LA2.18.36, siehe auch Satz 3.4 unten) liefert uns, dass der Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/mn \rightarrow \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n, \quad a \mapsto (a, a),$$

wobei wir die Restklasse von $a \in \mathbb{Z}$ in \mathbb{Z}/mn , \mathbb{Z}/m und \mathbb{Z}/n jeweils einfach wieder mit a bezeichnen, ein Isomorphismus ist. Dieser induziert einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/mn)^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/m)^\times \times (\mathbb{Z}/n)^\times,$$

und wegen $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n)^\times$ (und entsprechend für m und n) erhalten wir die Behauptung.

zu (2). Es ist klar, dass $\varphi(p) = p-1$ für jede Primzahl p gilt. Auch für eine Primzahlpotenz p^r ist das Abzählen relativ leicht, weil eine Zahl a zwischen 1 und p^r-1 genau dann zu p^r teilerfremd ist, wenn Sie nicht durch p teilbar ist. Die durch p teilbaren Zahlen sind p, \dots, p^r-p , und dies sind genau $p^{r-1}-1$ Zahlen, es folgt also

$$\varphi(p^r) = p^r - 1 - (p^{r-1} - 1) = p^{r-1}(p-1).$$

zu (3). Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir betrachten die zyklische Gruppe \mathbb{Z}/n .

Behauptung. Sei d ein Teiler von n . Dann haben genau $\varphi(d)$ Elemente von \mathbb{Z}/n die Ordnung d .

Bevor wir die Behauptung begründen wir, dass daraus die gewünschte Aussage folgt. Denn \mathbb{Z}/n hat n Elemente, und jedes Element hat als Ordnung einen Teiler von n . Indem wir die Elemente von \mathbb{Z}/n also »gemäß ihrer Ordnung als Gruppenelement sortiert« zählen, erhalten wir die Summendarstellung von n aus dem Lemma.

Begründung. Dass die Restklasse von $r \in \mathbb{Z}$ in \mathbb{Z}/n eine Untergruppe mit d Elementen erzeugt, ist dazu äquivalent, dass rd durch n teilbar ist, aber rd' für jeden echten Teiler d' von d nicht durch n teilbar ist, oder mit anderen Worten, dass $r \equiv a \frac{n}{d} \pmod n$ für ein $a \in \{1, \dots, d-1\}$ ist, das zu d teilerfremd ist. Es gibt also genau $\varphi(d)$ solcher Elemente. \square

KOROLLAR 2.45. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n . Dann enthält G genau $\varphi(n)$ Elemente der Ordnung $= n$, mit anderen Worten: genau $\varphi(n)$ Elemente, die jeweils die Gruppe G erzeugen.

BEISPIEL 2.46. Sei G eine Gruppe, die nicht die triviale Gruppe ist und derart dass $\{1\}$ und G die einzigen Untergruppen von G sind. Dann ist G zyklisch von Primzahlordnung.

In der Tat ist klar, dass G zyklisch ist, denn für $g \in G, g \neq 1$, ist $\langle g \rangle$ eine nichttriviale Untergruppe von G , nach Voraussetzung also $= G$. Wäre $\text{ord}(g)$ keine Primzahl und etwa d ein echter Teiler von $\text{ord}(g)$, so wäre $\langle g^d \rangle$ eine echte Untergruppe von G . \diamond

THEOREM 2.47. Sei G eine endliche Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) die Gruppe G ist zyklisch,
- (ii) zu jedem Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ existiert genau eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit d Elementen,
- (iii) zu jedem Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ existiert höchstens eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit d Elementen,
- (iv) für jeden Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ gilt

$$\#\{x \in G; x^d = 1\} = d,$$

- (v) für jeden Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ gilt

$$\#\{x \in G; x^d = 1\} \leq d,$$

- (vi) für jeden Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ gilt

$$\#\{x \in G; \text{ord}(x) = d\} = \varphi(d),$$

- (vii) für jeden Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ gilt

$$\#\{x \in G; \text{ord}(x) = d\} \leq \varphi(d).$$

BEWEIS. (i) \Rightarrow (ii). Ist G eine endliche zyklische Gruppe, die von einem Element $g \in G$ erzeugt wird und ist d ein Teiler von $n := \#G$, so ist $\langle g^{n/d} \rangle$ eine Untergruppe von G mit d Elementen.

Ist andererseits H eine Untergruppe von G mit d Elementen, so hat der Quotient G/H genau $\frac{n}{d}$ Elemente, und es folgt $g^{n/d} \in H$. Weil wir bereits wissen, dass $\#\langle g^{n/d} \rangle = d$ gilt, folgt die Gleichheit.

Die Implikationen (ii) \Rightarrow (iii), (iv) \Rightarrow (v) und (vi) \Rightarrow (vii) sind klar.

(iii) \Rightarrow (vii). Ist x ein Element mit $\text{ord}(x) = d$, so gilt also $\#\langle x \rangle = d$, und die (zyklische) Gruppe $\langle x \rangle$ enthält $\varphi(d)$ Elemente der Ordnung $= d$ (die alle diese Gruppe erzeugen). Gäbe es mehr als $\varphi(d)$ Elemente der Ordnung d , so könnten diese nicht alle in der Untergruppe $\langle x \rangle$ liegen. Da es höchstens eine Untergruppe der Ordnung d gibt, ist das unmöglich. Dasselbe Argument zeigt auch die Implikation (v) \Rightarrow (vii).

(vii) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i). Wir haben in Lemma 2.44 gesehen, dass $\sum_{d|n} \varphi(n) = n$ gilt (wobei über alle positiven Teiler von n summiert werde). Da jedes Element von G als Ordnung einen Teiler der Gruppenordnung hat, kann (vii) nur gelten, wenn für jedes d Gleichheit gilt (also (vi) gilt), und dann existieren insbesondere Elemente der Ordnung $n = \#G$, also Elemente die G erzeugen.

Für die Implikation (i) \Rightarrow (iv) genügt es, die (additive) Gruppe \mathbb{Z}/n zu betrachten, und hier sind genau die Restklassen von $0, \frac{n}{d}, \dots, (d-1)\frac{n}{d}$ die Elemente x mit $dx = 0$. \square

Aus dem Theorem erhalten wir leicht den folgenden interessanten Satz, der für uns später noch nützlich sein wird.

SATZ 2.48. *Sei K ein Körper und sei $G \subseteq K^\times$ eine endliche Untergruppe. Dann ist G zyklisch.*

BEWEIS. Sei $n = \#G$ und sei d ein Teiler von n . Alle Elemente $x \in G$ mit $x^d = 1$ sind dann Nullstellen des Polynoms $X^d - 1$. Wir wissen, dass dieses Polynom in K höchstens d Nullstellen hat. Die Bedingung (v) in Theorem 2.47 ist also erfüllt und es folgt, dass G zyklisch ist. \square

KOROLLAR 2.49. *Sei K ein endlicher Körper. Dann ist die Gruppe K^\times zyklisch.*

Für einen anderen, etwas direkteren Beweis des Satzes siehe Theorem LAI.8.60. Siehe auch die sich dort anschließende Bemerkung über die Vermutung von E. Artin, dass (zum Beispiel) die Restklasse von 2 für unendlich viele p ein Erzeuger der Gruppe \mathbb{F}_p^\times ist.

Man beachte aber, dass für allgemeines n die Gruppe $(\mathbb{Z}/n)^\times$ nicht zyklisch ist, zum Beispiel ist $(\mathbb{Z}/8)^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ (wobei natürlich links die Multiplikation und rechts die Addition die Gruppenstruktur geben).

ERGÄNZUNG 2.50 (Primitivwurzeln modulo n). Von Gauß wurde der folgende Satz bewiesen, der die Frage klärt, für welche $n > 1$ die Gruppe $(\mathbb{Z}/n)^\times$ zyklisch ist. (Einen Erzeuger dieser Gruppe nennt man eine *Primitivwurzel modulo n* .)

SATZ 2.51. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/n)^\times$ ist genau dann zyklisch, wenn n eine der Zahlen der folgenden Liste ist:*

- (1) $n = 2$,
- (2) $n = 4$,
- (3) $n = p^r$ für eine Primzahl $p > 2$ und $r \geq 1$,
- (4) $n = 2p^r$ für eine Primzahl $p > 2$ und $r \geq 1$.

Siehe zum Beispiel [Bu] Kap. 2 §5.

\square Ergänzung 2.50

2.5. Die symmetrische Gruppe

Wir bezeichnen mit S_n die *symmetrische Gruppe* »auf n Buchstaben«, also die Gruppe der Bijektionen $\{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$. Aus der Linearen Algebra kennen wir den Begriff des r -Zykels, Definition LAI.8.36.

SATZ 2.52 (Zerlegung in disjunkte Zykeln). *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Zykeln der Ordnung > 1 und mit paarweise disjunkten Trägern schreiben. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.*

BEWEIS. »Anschaulich« ist die Sache einigermaßen klar, siehe Ergänzung LAI.8.38. Überlegen Sie selbst einmal, wie Sie einen formalen Beweis organisieren würden. Dies ist auch ein gutes Beispiel eines Satzes, der in vielen (Algebra-)Büchern bewiesen wird, und wo der Beweis teils auf ziemlich unterschiedliche Weise aufgeschrieben wurde – vergleichen Sie einige Beweise (zum Beispiel [Bo-A] 5.3 Satz 1 (ii), [JS] Kap. I Satz 3.3 (a), [Lo] Kap. 15, [Lö] Prop. 1.3.6) und schreiben Sie am Ende »den für Sie selbst besten Beweis« auf.

Sei $G = \langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte zyklische Gruppe. Dann operiert G auf $\{1, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit B_1, \dots, B_r diejenigen Bahnen von G auf $\{1, \dots, n\}$, die mehr als ein Element haben. Sei $b_i \in B_i$ jeweils ein fixiertes Element und sei $n_i = \#B_i$. Für $1 \leq m < n_i$ gilt dann $\sigma^m(b_i) \neq b_i$, denn sonst hätte B_i höchstens m Elemente. Es folgt

$$B_i = \{b_i, \sigma(b_i), \sigma^2(b_i), \dots, \sigma^{n_i-1}(b_i)\}$$

(die Inklusion \supseteq ist klar, und mit dem vorher gegebenen Argument sieht man leicht, dass die Elemente auf der rechten Seite paarweise verschieden sind, so dass beide Seiten gleich viele Elemente haben), und dass $\sigma^{n_i}(b_i) = b_i$ gilt. Wenn wir mit π_i den Zykel $(b_i, \sigma(b_i), \sigma^2(b_i), \dots, \sigma^{n_i-1}(b_i))$ bezeichnen, erhalten wir mit

$$\sigma = \pi_1 \cdots \pi_r$$

eine Zerlegung von σ als Produkt von Zykeln mit disjunkten Trägern.

Zur Eindeutigkeit beobachten wir zunächst, dass die in so einer Zerlegung auftretenden Zykeln bijektiv den Bahnen von σ entsprechen müssen, die mehr als ein Element haben, weil die Träger dieser Zykeln nach Voraussetzung disjunkt sind. Fixieren wir eine dieser Bahnen, etwa B , so stimmen die Einschränkung von σ und des der Bahn entsprechenden Zykels als Abbildungen $B \rightarrow B$ überein, und folglich sind die einzelnen Zykeln in der Zerlegung eindeutig bestimmt. \square

Bei der Eindeutigkeitsaussage ist zu beachten, dass sich die Eindeutigkeit eines Zykels auf die Eindeutigkeit als Permutation, nicht auf die Schreibweise bezieht, zum Beispiel gilt $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$.

Jeder Permutation σ können wir ihr *Signum* oder *Vorzeichen* $\text{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ zuordnen. Die Signumsabbildung $S_n \rightarrow \{1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

DEFINITION 2.53. Wir schreiben $A_n = \text{Ker}(\text{sgn})$ und nennen diesen Normalteiler von S_n die *alternierende Gruppe*. \dashv

SATZ 2.54 (Satz von Cayley). Sei G eine Gruppe, und sei $\text{Bij}(G)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen $G \rightarrow G$ (mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung). Für $g \in G$ liegt die Abbildung $m_g: G \rightarrow G, x \mapsto gx$, in $\text{Bij}(G)$ und die Abbildung

$$G \rightarrow \text{Bij}(G), \quad g \mapsto m_g,$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Insbesondere gilt: Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

BEWEIS. Für $g \in G$ definiert die Vorschrift $x \mapsto gx$ eine Abbildung $m_g: G \rightarrow G$ (dies ist kein Gruppenhomomorphismus, wenn g nicht das neutrale Element von G ist). Die Abbildung m_g ist bijektiv, denn ist $h \in G$ das inverse Element zu g , so ist m_h die Umkehrabbildung von m_g .

Wir erhalten eine Abbildung $G \rightarrow \text{Bij}(G), g \mapsto m_g$. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für Elemente $g, h \in G$ gilt:

$$m_{h'}(x) = (gh)x = g(hx) = m_g(m_h(x)) = (m_g \circ m_h)(x).$$

Zudem ist die Abbildung $g \rightarrow m_g$ injektiv. Es genügt dafür zu zeigen, dass nur das neutrale Element von G auf das neutrale Element von S_n abgebildet wird. Aber wenn $m_g = \text{id}$ die Identitätsabbildung ist, dann folgt $gx = x$ für alle $x \in G$, und diese Eigenschaft charakterisiert das neutrale Element von G .

Der Zusatz folgt, weil für eine endliche Gruppe mit n Elementen jede Bijektion zwischen G und der Menge $\{1, \dots, n\}$ einen Gruppenisomorphismus $\text{Bij}(G) \xrightarrow{\sim} S_n$ induziert. \square

ERGÄNZUNG 2.55 (Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe). Die Zykelzerlegung gibt auch Aufschluss über die *Konjugationsklassen* in der symmetrischen Gruppe S_n , also über die Bahnen unter der Konjugationsoperation von S_n auf sich selbst, oder noch anders gesagt über die Äquivalenzklassen in S_n bezüglich der Äquivalenzrelation

$$g \sim g' \iff \text{es existiert } h \text{ mit } g' = hgh^{-1}.$$

Die Konjugationsklassen zu verstehen, gibt oft sehr interessante Informationen über die Struktur einer Gruppe und ist insbesondere in der Darstellungstheorie (siehe Ergänzungsabschnitt 2.8.4) von Bedeutung.

Für $\sigma \in S_n$ mit Zerlegung $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_r$ in Zykel der Ordnung > 1 mit disjunkten Trägern nennen wir das absteigend geordnete Tupel der Ordnungen der Zykeln π_i , ergänzt um Einsen (je eine 1 für jedes Element $\{1, \dots, n\}$, das von σ auf sich selbst abgebildet wird) den *Zykeltyp* von σ . Zum Beispiel hat

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 9 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (142)(38697)$$

den Zykeltyp $(5, 3, 1)$. Die Ergänzung um Einsen (sozusagen für die 1-Zykeln, die wir in der Zykelzerlegung nicht hinschreiben) hat zur Folge, dass für jedes $\sigma \in S_n$ die Summe aller Einträge des Zykeltyps gleich n ist.

Dann gilt der folgende Satz:

SATZ 2.56. *Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie denselben Zykeltyp haben.*

Siehe [Soe] Abschnitt 5.5.

\square Ergänzung 2.55

2.6. Auflösbare Gruppen

Um die Struktur einer Gruppe zu untersuchen, liegt es nahe zu versuchen, sie »in kleinere Teile zu zerlegen«, die man dann unabhängig voneinander betrachten kann. Im einfachsten Fall eines Produkts von Gruppen $G \times H$ kann man tatsächlich alle interessanten Eigenschaften des Produkts beschreiben, wenn man die Faktoren G und H hinreichend genau versteht.

Allgemeiner kann man, gegeben eine Gruppe G , versuchen, einen Normalteiler $H \subseteq G$ zu finden und dann G zu verstehen, indem man H und den Quotienten G/H anschaut. Der Satz von Lagrange sagt zum Beispiel, dass man die Ordnung der Gruppe G aus den Ordnungen von H und G/H (nämlich als deren Produkt) berechnen kann. Für andere Eigenschaften ist es schwieriger (zum Beispiel sind für kommutatives G natürlich stets H und G/H kommutativ; die Umkehrung gilt aber nicht, wie Sie sich an einem Beispiel überlegen sollten). Dennoch ist der Ansatz grundsätzlich nützlich. Er lässt sich weiter verfeinern, indem man mit H und G/H genauso verfährt und dort nach echten Normalteilern sucht, usw. Äquivalent dazu ist es (vergleiche Lemma 2.16), in G eine Kette von Untergruppen zu suchen, so dass jede in der nächstgrößeren ein Normalteiler ist. Diesen Ketten geben wir den Namen *Normalreihe*.

DEFINITION 2.57. Sei G eine Gruppe. Eine *Normalreihe* in G ist eine Kette

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}$$

von Untergruppen von G , so dass für alle i die Untergruppe G_{i+1} ein Normalteiler von G_i ist.

Die Gruppenquotienten G_i/G_{i+1} nennt man auch die *Subquotienten* der Normalreihe. \dashv

Man beachte, dass die Untergruppen G_i (für $i > 1$) einer Normalreihe im allgemeinen keine Normalteiler von G sein werden (und suche ein Beispiel, wo das tatsächlich nicht der Fall ist – gegebenenfalls können Sie in Satz 2.65 fündig werden).

Auch wenn, wie gesagt, die Gruppe G durch die Subquotienten einer Normalreihe nicht eindeutig bestimmt ist, liefern diese doch eine gewisse Menge an Information über die Gruppe G . Wenn G außer $\{1\}$ und G gar keine Normalteiler besitzt, dann ist natürlich eine solche Zerlegung nicht möglich; diese Gruppen nennt man *einfache* Gruppen und solche Gruppen müssen mit anderen Methoden untersucht werden. Siehe Abschnitt 2.8 und speziell Ergänzung 2.70.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem verhältnismäßig einfachen Fall von Gruppen befassen, die eine Normalreihe besitzen, deren Subquotienten sämtlich kommutative Gruppen sind.

DEFINITION 2.58. Sei G eine Gruppe. Wir nennen G *auflösbar*, wenn eine Normalreihe

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}$$

in G existiert, derart dass alle Quotienten G_i/G_{i+1} *abelsche* Gruppen sind. \dashv

Offenbar ist jede abelsche Gruppe auflösbar, aber zum Beispiel auch die Gruppen S_3 (das ist recht leicht zu sehen) und S_4 (siehe Satz 2.65).

Ein nützliches Werkzeug zum Studium dieser Eigenschaft ist die sogenannte Kommutatoruntergruppe, die wir als nächstes einführen.

DEFINITION 2.59. Sei G eine Gruppe.

(1) Für Elemente $g, h \in G$ heißt

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$$

der *Kommutator* der Elemente g und h .

(2) Für Untergruppen $H, H' \subseteq G$ bezeichnen wir mit $[H, H']$ die von allen Elementen der Form $[h, h']$, $h \in H, h' \in H'$ erzeugte Untergruppe von G .

(3) Die Untergruppe $[G, G] \subseteq G$, also die von allen Elementen der Form $[g, h]$, $g, h \in G$, erzeugte Untergruppe von G , heißt die *Kommutatoruntergruppe* von G . \dashv

SATZ 2.60. Sei G eine Gruppe. Dann ist $[G, G]$ ein Normalteiler von G und der Quotient $G_{ab} = G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe und hat die folgende universelle Eigenschaft (und heißt deshalb der maximale abelsche Quotient der Gruppe G):

Ist H eine abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so faktorisiert f eindeutig über G_{ab} , d.h. es existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $\varphi: G_{ab} \rightarrow H$, so dass f mit der Verkettung von φ und der kanonischen Projektion $G \rightarrow G_{ab}$ übereinstimmt.

BEWEIS. Für $g, h, x \in G$ gilt

$$x[g, h]x^{-1} = xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1}xg^{-1}x^{-1}xh^{-1}x^{-1} = [xgx^{-1}, xhx^{-1}] \in [G, G].$$

Es folgt $x[G, G]x^{-1} \subseteq [G, G]$ und (mit derselben Rechnung für x^{-1} anstelle von x) sogar $x[G, G]x^{-1} = [G, G]$. Weil das Argument für alle $x \in G$ gültig ist, sehen wir, dass $[G, G]$ ein Normalteiler in G ist. Ist $\pi: G \rightarrow G/[G, G]$ die kanonische Projektion, so gilt $\pi([g, h]) = 1$, also $\pi(g)\pi(h) = \pi(h)\pi(g)$ für alle $g, h \in G$. Weil π surjektiv ist, folgt, dass $G_{\text{ab}} = G/[G, G]$ abelsch ist.

Ist H abelsch, so bildet jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ Elemente der Form $[g, h]$ auf das neutrale Element in H ab. Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert f über einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $G_{\text{ab}} \rightarrow H$. \square

BEISPIEL 2.61. (1) Die Kommutatoruntergruppe einer Gruppe G ist genau dann die triviale Gruppe, wenn G kommutativ ist.

(2) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weil der Quotient $GL_n(K)/SL_n(K) \cong K^\times$ abelsch ist, liegt die Kommutatoruntergruppe von $GL_n(K)$ in der speziellen linearen Gruppe $SL_n(K)$. Man kann zeigen (vergleiche LA1, WS20/21, Hausaufgabe 11.4), dass sogar $[GL_n(K), GL_n(K)] = SL_n(K)$ gilt, es sei denn es ist $K = \mathbb{F}_2$ und $n = 2$ (in diesem Fall ist $SL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$, und die Kommutatoruntergruppe hat 3 Elemente).

Man kann weiterhin zeigen, dass die Gruppe $GL_n(K)$ genau dann auflösbar ist, wenn $n = 1$ oder wenn $n = 2$ und $\#K \leq 3$ ist.

\diamond

LEMMA 2.62. Sei G eine Gruppe. Sei $D^0G = G$, $D^1G := [G, G]$, und allgemein $D^iG = [D^{i-1}G, D^{i-1}G]$ für $i \geq 1$. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Gruppe G ist auflösbar.
- (ii) Es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass D^nG die triviale Gruppe ist.

BEWEIS. Sei zunächst G auflösbar und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}$$

eine Normalreihe mit abelschen Subquotienten. Weil G_0/G_1 abelsch ist, folgt $DG \subseteq G_1$. Induktiv sehen wir dann $D^i \subseteq G_i$ für alle i und insbesondere $D^rG = 1$.

Ist andererseits $D^nG = 1$, so ist

$$G \supset DG \supset D^2G \supset \cdots \supset D^nG = \{1\}$$

eine Normalreihe mit abelschen Quotienten. \square

LEMMA 2.63. (1) Sei G eine auflösbare Gruppe. Dann ist jede Untergruppe $H \subseteq G$ auflösbar.

(2) Sei G eine Gruppe und sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Sei $\pi: G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion auf den Quotienten. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Gruppe G ist auflösbar.
 - (ii) Die Gruppen H und G/H sind auflösbar.
- (3) Seien G_1, \dots, G_n Gruppen. Das Produkt $\prod_{i=1}^n G_i$ ist genau dann auflösbar, wenn alle G_i , $i = 1, \dots, n$, auflösbar sind.

BEWEIS. Teil (1) folgt aus dem vorherigem Lemma, weil $D^iH \subseteq D^iG$ für alle i gilt.

In Teil (2) ist für die Implikation (i) \Rightarrow (ii) nun nur noch die Auflösbarkeit von G/H zu zeigen. Das folgt daraus, dass $\pi(D^iG) = D^i(G/H)$ gilt, wie man leicht per Induktion nach i zeigt. (Alternativ kann man Lemma 2.16 (6) und Korollar 2.25 benutzen, um zu sehen, dass eine

Normalreihe von G mit abelschen Subquotienten unter π auf eine Normalreihe von G/H mit abelschen Subquotienten abgebildet wird.)

Zur Umkehrung (ii) \Rightarrow (i) betrachten wir Normalreihen

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_r = \{1\}$$

und

$$G/H = \bar{G}_0 \supset \bar{G}_1 \supset \cdots \supset \bar{G}_s = \{1\}$$

mit abelschen Subquotienten. Dann ist

$$G = \pi^{-1}(\bar{G}_0) \supset \pi^{-1}(\bar{G}_1) \supset \cdots \supset \pi^{-1}(\bar{G}_s) = H = H_0 H_1 \supset \cdots \supset H_r = \{1\}$$

eine Normalreihe von G (Lemma 2.16 (6)) mit abelschen Subquotienten, denn aus dem Homomorphiesatz (oder alternativ aus Korollar 2.25, denn $\pi^{-1}(\bar{G}_i)/H = \bar{G}_i$) folgt

$$\pi^{-1}(\bar{G}_i)/\pi^{-1}(\bar{G}_{i+1}) \cong \bar{G}_i/\bar{G}_{i+1}$$

für alle i . (Alternativ kann man auch hier mit den iterierten Kommutatoruntergruppen argumentieren.)

Teil (3) folgt für ein Produkt mit zwei Faktoren aus Teil (2) (denn H ist ein Normalteiler von $H \times H'$) und im allgemeinen dann per Induktion. \square

LEMMA 2.64. Sei G eine endliche Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Gruppe G ist auflösbar.
- (ii) Es existiert eine Kette

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}$$

von Untergruppen von G , so dass für alle i die Untergruppe G_i ein Normalteiler von G_{i+1} ist und der Quotient G_i/G_{i+1} eine zyklische Gruppe ist.

BEWEIS. Die Implikation (ii) \Rightarrow (i) ist trivial und für die Richtung (i) \Rightarrow (ii) können wir eine Normalreihe von G mit abelschen Subquotienten verfeinern, indem wir zusätzliche Untergruppen so hinzufügen, dass die Normalreiheneigenschaft erhalten bleibt und nach diesem Prozess alle Subquotienten zyklisch sind.

Das bedeutet, dass es genügt zu zeigen, dass jede abelsche Gruppe eine Normalreihe mit zyklischen Subquotienten besitzt. Das zeigen wir durch Induktion nach der Gruppenordnung. Der Induktionsanfang ist klar. Im allgemeinen betrachten wir für gegebenes $G \neq 1$ irgendein Element $g \in G$, das vom neutralen Element verschieden ist. Dann ist $\langle g \rangle \subseteq G$ ein Normalteiler und eine zyklische Gruppe. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Normalreihe von $G/\langle g \rangle$ mit zyklischen Subquotienten, und durch Zusammensetzen wie im Beweis von Lemma 2.63 erhalten wir eine Normalreihe von G mit zyklischen Subquotienten. \square

Der folgende Satz liefert uns einige nicht-triviale Beispiele für auflösbare und (vor allem) für nicht auflösbare Gruppen, und er wird am Ende der Vorlesung bei der Anwendung der Galois-Theorie auf die Frage der Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale noch einmal nützlich sein.

SATZ 2.65. (1) Für alle $n \geq 2$ gilt $[S_n, S_n] = A_n$.

(2) Für $n \leq 4$ sind S_n und A_n auflösbar.

(3) Für $n > 4$ sind weder S_n noch A_n auflösbar.

BEWEIS. zu (1). Weil der Quotient $S_n/A_n \cong \{1, -1\}$ abelsch ist, faktorisiert die Signum-Abbildung über $(S_n)_{\text{ab}}$, also ist $A_n \subseteq [S_n, S_n]$. Für $n = 2$ ist auch die Gleichheit klar. Sei nun $n \geq 3$ und $\sigma \in A_n$. Die Aussage in (1) folgt dann aus den folgenden beiden Behauptungen:

Behauptung 1. Jedes Element von A_n ist Produkt von 3-Zykeln.

Begründung. Es genügt zu zeigen, dass das Produkt von zwei verschiedenen Transpositionen stets ein Produkt von 3-Zykeln ist, weil sich jedes Element von A_n als ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben lässt. Nun können wir für paarweise verschiedene Elemente a, b, c bzw. a, b, c, d von $\{1, \dots, n\}$ schreiben:

$$(a, b)(b, c) = (a, b, c), \quad (a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d).$$

Behauptung 2. Jeder 3-Zykel ist ein Kommutator von Elementen von S_n .

Begründung. Seien $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Dann gilt

$$(a, b, c) = (a, c)(b, c)(a, c)(b, c) = [(a, c), (b, c)].$$

zu (2). Es ist leicht zu sehen, dass S_1, S_2 und S_3 auflösbar sind. (Prüfen Sie das nach!) Wir betrachten nun die symmetrische Gruppe S_4 , eine Gruppe mit 24 Elementen. Die Untergruppe A_4 hat also 12 Elemente, und nach Teil (1) genügt es zu zeigen, dass A_4 auflösbar ist.

Behauptung. $[A_4, A_4] = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Begründung. Wir schreiben $V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Dies ist offenbar eine Untergruppe von A_4 , und isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Man rechnet nun direkt nach, dass V ein Normalteiler ist. Daraus folgt, dass $[A_4, A_4] \subseteq V$ ist, weil der Quotient A_4/V als Gruppe mit 3 Elementen jedenfalls abelsch ist. Die Inklusion $V \subseteq [A_4, A_4]$ kann man wiederum direkt nachrechnen, zum Beispiel gilt, weil alle 3-Zykel in der alternierenden Gruppe liegen,

$$(12)(34) = [(123), (124)] \in [A_4, A_4].$$

Weil V abelsch ist, folgt aus der Behauptung sofort die Auflösbarkeit von A_4 .

zu (3). Sei nun $n \geq 5$. Wir haben im Beweis von Teil (1) gesehen, dass jedes Element von A_n ein Produkt von 3-Zykeln ist. Es genügt also zu zeigen, dass jeder 3-Zykel sich als Kommutator von 3-Zykeln ausdrücken lässt. Seien $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Weil $n \geq 5$ ist, können wir Elemente $d \neq e$ wählen, die von a, b und c verschieden sind und haben dann

$$(a, b, c) = [(a, b, d), (a, c, e)].$$

□

Mit ähnlichen Methoden (aber etwas mehr Arbeit ...) kann man die Verschärfung von Teil (3) dieses Satzes zeigen, dass für $n \geq 5$ die Gruppe A_n einfach ist, also überhaupt keine nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

Wir geben zum Schluss als Ergänzungen noch einige Ergebnisse über nicht notwendig auflösbare Gruppen an, von denen der folgende Satz von Jordan-Hölder recht einfach, der Satz von Feit und Thompson und vor allem die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen aber extrem schwierig zu beweisen sind.

ERGÄNZUNG 2.66 (Kompositionsreihen und der Satz von Jordan-Hölder).

DEFINITION 2.67. Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn G nicht die triviale Gruppe ist und $\{1\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind. \dashv

DEFINITION 2.68. Sei G eine Gruppe. Eine Normalreihe von G heißt *Kompositionsreihe*, wenn alle Subquotienten einfache Gruppen sind. \dashv

Ist G eine endliche Gruppe, so kann man offenbar jede Normalreihe zu einer Kompositionsreihe verfeinern, indem man gegebenenfalls zusätzliche Untergruppen einfügt (vergleiche Lemma 2.16). Weil G endlich ist, muss dieser Prozess irgendwann abbrechen. Insbesondere besitzt jede endliche Gruppe eine Kompositionsreihe.

SATZ 2.69 (Satz von Jordan-Hölder). *Sei G eine endliche Gruppe. Je zwei Kompositionsreihen einer endlichen Gruppe haben die gleiche Länge und die Subquotienten einer Kompositionsreihe sind bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Explizit ausgeschrieben bedeutet der Satz also, dass für Kompositionsreihen

$$\begin{aligned} G &= G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\} \\ G &= G'_0 \supset G'_1 \supset \cdots \supset G'_r = \{1\} \end{aligned}$$

von G gelten muss, dass $r = s$ ist, und dass es eine Permutation $\sigma \in S_r$ sowie Isomorphismen $G_{i-1}/G_i \cong G'_{\sigma(i)-1}/G'_{\sigma(i)}$ für alle $i = 1, \dots, r$ gibt.

Wir führen zum Beweis Induktion nach $\#G$. Für die triviale Gruppe ist nichts zu zeigen.

Ist $G'_1 \subseteq G_1$, so muss sogar die Gleichheit gelten, denn sonst wäre das Bild von G_1 unter der kanonischen Projektion nach G/G'_1 ein nicht-trivialer Normalteiler. Wenn tatsächlich $G_1 = G'_1$ gilt, so folgt die Aussage direkt aus der Induktionsvoraussetzung.

Wir betrachten nun den Fall, dass $G_1 \not\subseteq G'_1$ und $G'_1 \not\subseteq G_1$ gilt. Dann ist das Bild H von G_1 unter der kanonischen Projektion $G \rightarrow G/G'_1$ ein Normalteiler der einfachen Gruppe G/G'_1 , der nicht die triviale Gruppe ist, wegen der Einfachheit also gleich G/G'_1 . Mit anderen Worten: Die Abbildung $G_1 \rightarrow G/G'_1$ ist surjektiv, und sie induziert nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $G_1/G_1 \cap G'_1 \cong G/G'_1$. Genauso erhalten wir einen Isomorphismus $G'_1/G_1 \cap G'_1 \cong G/G_1$.

Sei nun

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_t = \{1\}$$

irgendeine Kompositionsreihe von $H := G_1 \cap G'_1$. Das oben Gesagte impliziert, dass die beiden Kompositionsreihen

$$\begin{aligned} G &= G_0 \supset G_1 \supset G_1 \cap G'_1 = H \supset H_1 \supset \cdots \supset H_t = \{1\}, \\ G &= G'_0 \supset G'_1 \supset G_1 \cap G'_1 = H \supset H_1 \supset \cdots \supset H_t = \{1\} \end{aligned}$$

bis auf Reihenfolge und Isomorphie dieselben Subquotienten haben. Offenbar haben sie auch dieselbe Länge. Andererseits haben auch die beiden Kompositionsreihen

$$\begin{aligned} G &= G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}, \\ G &= G_0 \supset G_1 \supset G_1 \cap G'_1 = H \supset H_1 \supset \cdots \supset H_t = \{1\} \end{aligned}$$

einerseits (Induktionsvoraussetzung angewandt auf G_1) und

$$\begin{aligned} G &= G'_0 \supset G'_1 \supset \cdots \supset G'_r = \{1\}, \\ G &= G'_0 \supset G'_1 \supset G_1 \cap G'_1 = H \supset H_1 \supset \cdots \supset H_t = \{1\} \end{aligned}$$

andererseits (Induktionsvoraussetzung angewandt auf G'_1) dieselben Längen und bis auf Reihenfolge und Isomorphie dieselben Subquotienten. Indem wir alles zusammensetzen, erhalten wir die Behauptung. \square

Wie man am Beweis sieht, lässt sich das Prinzip des Satzes von Jordan-Hölder auf andere Situationen übertragen, in denen ein ähnlicher Formalismus von Unterobjekten, Quotienten und dem Homomorphiesatz zur Verfügung steht. \square Ergänzung 2.66

ERGÄNZUNG 2.70 (Endliche einfache Gruppen). Wie oben bemerkt, können wir für jede endliche Gruppe eine Kompositionsreihe finden, also eine Normalreihe, die nicht weiter verfeinert werden kann. Nach dem Satz von Jordan-Hölder sind sogar die Länge einer solchen Kompositionsreihe und die einfachen Gruppen, die dort als Subquotienten auftreten, mit den jeweiligen Vielfachheiten bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt. Andererseits liefern diese Ergebnisse keinerlei Aussagen über einfache Gruppen selbst, also über Gruppen, die keine nicht-trivialen Normalteiler besitzen.

Es ist eine naheliegende Frage, ob man diese einfachen Gruppen besser verstehen kann, zum Beispiel ob man sie »auflisten« kann, genauer, ob man eine vollständige Liste der endlichen einfachen Gruppen bis auf Isomorphie angeben kann, also eine Liste, so dass jede endliche Gruppe zu genau einer der Gruppen auf der Liste isomorph ist (vergleiche Beispiel 2.6), wo wir entsprechende Listen für Gruppen der Ordnung ≤ 6 angegeben haben.

Das ist tatsächlich möglich (wenn auch nicht einfach). Der folgende Satz beantwortet die Frage im wesentlichen; in der dort angegebenen Liste gibt es einige Überschneidungen, d.h. einige der genannten Gruppen sind zueinander isomorph, aber diese sind gut verstanden. Wir werden aber die Gruppen unter (3), (4) und (5) hier nicht definieren.

THEOREM 2.71 (Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen). *Sei G eine endliche einfache Gruppe, d.h. eine endliche Gruppe, die außer G und $\{1\}$ keine Normalteiler besitzt. Dann ist G isomorph zu einer der Gruppen der folgenden Liste:*

- (1) *Zyklische Gruppen \mathbb{Z}/p für eine Primzahl p ,*
- (2) *Alternierende Gruppen A_n für $n \geq 5$,*
- (3) *Gruppen »vom Lie-Typ«,*
- (4) *die Tits-Gruppe,*
- (5) *eine der 26 sporadischen endlichen einfachen Gruppen.*

Von den Gruppen dieser Liste haben wir die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung (dies sind genau die abelschen Gruppen auf der Liste) und die alternierenden Gruppen bereits kennengelernt.

Die (einfachen) endlichen Gruppen vom Lie-Typ (benannt nach [Sophus Lie](#)¹) hängen eng mit Matrix-Gruppen zusammen. Zum Beispiel liefert die folgende Konstruktion eine unendliche Familie endlicher einfacher Gruppen. Wir betrachten einen endlichen Körper K und $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Die Gruppe $SL_n(K)$ ist im allgemeinen nicht einfach, denn ihr Zentrum

$$Z_{SL_n(K)} = \{\text{diag}(\zeta, \dots, \zeta); \zeta \in K, \zeta^n = 1\}$$

ist im allgemeinen nicht-trivial. Der Quotient $PSL_n(K) := SL_n(K) / Z_{SL_n(K)}$ ist eine einfache Gruppe, es sei denn es ist $n = 2$ und $\#K \leq 3$. Die Gruppen $PSL_n(K)$ sind Gruppen vom Lie-Typ, und die anderen solchen Gruppen entstehen, grob gesprochen, durch ähnliche Matrix-Konstruktionen.

Die ersten drei Punkte auf der Liste umfassen jeweils unendlich viele Gruppen (jeweils mit »ähnlicher Struktur« bzw. ähnlichen Konstruktionsmethoden). Der vierte Punkt umfasst nur eine einzige Gruppe, die nach [Jacques Tits](#)² benannte Tits-Gruppe, die eng mit den endlichen Gruppen vom Lie-Typ verwandt ist (und daher manchmal auch zu diesen hinzugerechnet wird; von anderen Autoren wird sie zu den sporadischen Gruppen hinzugefügt, so dass diese von 27 sporadischen Gruppen sprechen).

Als die sporadischen Gruppen werden die endlich vielen verbleibenden Gruppen genannt, die nicht in natürlicher Weise in eine der unendlichen Familien aus den Punkten (1) bis (3)

¹https://de.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie

²https://de.wikipedia.org/wiki/Jacques_Tits

eingordnet werden können und für die jeweils ad hoc eine Konstruktion angegeben werden muss. Die kleinste der sporadischen Gruppen ist die sogenannte Mathieu-Gruppe M_{11} mit 7920 Elementen, die größte ist die **Monster-Gruppe**³ mit

808, 017, 424, 794, 512, 875, 886, 459, 904, 961, 710, 757, 005, 754, 368, 000, 000, 000

Elementen. Das Problem dabei, mit dieser Gruppe zu arbeiten und sie zu verstehen ist dabei nicht einmal so sehr die Größe der Gruppe. Die Gruppe A_{50} hat beispielsweise noch mehr Elemente, aber wenn zwei Elemente (als Permutationen von $\{1, \dots, 50\}$ mit Signum 1) gegeben sind, könnte man diese notfalls sogar per Hand multiplizieren. Für die Elemente der Monstergruppe gibt es aber, wie man weiß, keine derart einfache »Realisierung« durch Permutationen (oder durch Matrizen). Der Satz von Cayley besagt zwar, dass man auch diese Gruppe mit einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe S_n identifizieren kann. Aber hier muss n mindestens 97, 239, 461, 142, 009, 186, 000 sein! Möchte man die Monstergruppe als Untergruppe einer Gruppe der Form $GL_n(K)$, K ein Körper, realisieren (also einen Isomorphismus mit so einer Untergruppe finden), muss $n \geq 196, 882$ gelten.

Übersichtsartikel zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen:

M. Aschbacher, *The Status of the Classification of the Finite Simple Groups*, Notices of the A. M. S. **51**, no. 7 (2004), 736–740,

<https://www.ams.org/notices/200407/fea-aschbacher.pdf>

R. Solomon, *A brief history of the classification of the finite simple groups*, Bull. A. M. S. **38**, no. 3 (2001), 315–352,

<https://www.ams.org/journals/bull/2001-38-03/S0273-0979-01-00909-0/>

Ein spektakulärer Zusammenhang zwischen Monstergruppe und sogenannten Modulformen, die in der Zahlentheorie auftreten, wurde Ende der 1980er Jahre von Conway und Norton vermutet (**monstrous moonshine conjecture**⁴) und 1992 von Borcherd bewiesen, der unter anderem dafür mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde.

R. Borcherds, *What is... the Monster?*

<http://www.ams.org/notices/200209/what-is.pdf>

M. Ronan, *Symmetry and the Monster*, Oxford University Press 2006.

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine

Der Beweis des Klassifikationstheorems ist *sehr lang* – von der **Wikipedia**⁴-Seite: »The proof of the theorem consists of tens of thousands of pages in several hundred journal articles written by about 100 authors, ...«

Eine konkrete Aussage, die man mithilfe der Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen beweisen konnte, für die aber kein direkter Beweis bekannt ist, ist Teil (2) des folgenden **Satzes**⁵. Teil (1) wurde schon 1903 von Frobenius bewiesen, und Teil (2) wurde von ihm als Vermutung formuliert.

SATZ 2.72. Sei G eine endliche Gruppe und sei n ein Teiler von $\#G$.

- (1) Die Anzahl der Elemente $x \in G$ mit $x^n = 1$ ist ein Vielfaches von n .
- (2) Wenn es genau n Elemente $x \in G$ mit $x^n = 1$ gibt, dann bilden diese Elemente einen Normalteiler von G .

³<https://de.wikipedia.org/wiki/Monstergruppe>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups

⁵[https://en.wikipedia.org/wiki/Frobenius%27s_theorem_\(group_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Frobenius%27s_theorem_(group_theory))

ERGÄNZUNG 2.73 ([Satz von Feit-Thompson](#)⁶). Der Satz von Feit und Thompson ist der folgende einfach zu formulierende und zunächst überraschende Satz.

THEOREM 2.74. *Sei G eine endliche Gruppe, für die $\#G$ ungerade ist. Dann ist G auflösbar.*

Der Beweis von Feit und Thompson wurde 1963 veröffentlicht und umfasst 250 Seiten. Nach wie vor sind keine wesentlich kürzeren Beweise bekannt. Der Beweis konnte 2012 (nach mehrjähriger Arbeit daran) soweit formalisiert werden, dass er von dem System [Coq](#)⁷ verifiziert werden konnte.

Man kann den Satz in äquivalenter Weise so formulieren: Sei G eine endliche einfache Gruppe, die nicht abelsch ist. Dann ist $\#G$ eine gerade Zahl. Insofern ist (mehr oder weniger...) klar, dass man den Satz von Feit und Thompson auch als Korollar zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen erhalten könnten – aber das wäre sozusagen mit Kanonen auf Spatzen geschossen. □ Ergänzung 2.73

2.7. Die Sylow-Sätze

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Beobachtung (Satz 2.76), dass jede Gruppe, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl ist, auflösbar ist.

DEFINITION 2.75. Seien p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Wir nennen G eine p -Gruppe, wenn die Ordnung von G eine Potenz von p ist. †

(Wir lassen hier den Fall p^0 , also den Fall der trivialen Gruppe auch zu, weil es im folgenden einige Formulierungen vereinfacht.)

SATZ 2.76. *Jede p -Gruppe ist auflösbar.*

BEWEIS. Wir führen Induktion nach der Gruppenordnung. Der Fall der trivialen Gruppe ist klar, sei also nun $\#G > 1$. Wir haben schon als Folgerung aus der Klassengleichung gezeigt (Lemma 2.36), dass dann das Zentrum Z_G nicht-trivial ist. Nun ist $Z_G \subseteq G$ ein Normalteiler und der Quotient G/Z_G ist ebenfalls eine p -Gruppe und damit nach Induktionsvoraussetzung auflösbar. Mit Lemma 2.63 folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun untersuchen, was wir über Untergruppen H einer endlichen Gruppe G sagen können, für die $\#H$ eine Primzahlpotenz ist. Diejenigen dieser Untergruppen, für die die Potenz maximal ist, nennt man Sylow-Gruppen nach dem norwegischen Mathematiker [Ludwig Sylow](#)⁸ (1832–1918), der 1872 die *Sylow-Sätze*, Satz 2.78, bewies.

DEFINITION 2.77. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl. Sei $\#G = p^r m$ mit $p \nmid m$. Unter einer p -Sylow-Untergruppe von G verstehen wir eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $\#H = p^r$. †

Mit anderen Worten ist eine p -Sylow-Untergruppe von G eine Untergruppe H von G , die eine p -Gruppe ist und so dass $\#G/H$ nicht durch p teilbar ist.

⁶https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Feit-Thompson

⁷[https://de.wikipedia.org/wiki/Coq_\(Software\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Coq_(Software))

⁸https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Ludwig_Mejdell_Sylow

SATZ 2.78 (Sylow-Sätze). Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl. Wir schreiben $\#G = p^m q$ mit $p \nmid q$.

- (1) Für alle natürlichen Zahlen $k \leq m$, existiert eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $\#H = p^k$. Insbesondere besitzt G eine p -Sylow-Untergruppe.
- (2) Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, die eine p -Gruppe ist, und ist $S \subseteq G$ eine p -Sylow-Gruppe von G , so existiert $g \in G$ mit $H \subseteq gSg^{-1}$. Insbesondere gilt: Je zwei p -Sylow-Untergruppen von G sind zueinander konjugiert.
- (3) Sei s_p die Anzahl der p -Sylow-Untergruppen von G . Dann gilt

$$s_p \mid \#G \quad \text{und} \quad s_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Man nennt manchmal auch die drei Teile des Satzes den ersten, zweiten bzw. dritten Sylow-Satz.

BEWEIS. Für den Fall $m = 0$, also $p \nmid \#G$ ist nichts zu zeigen, wir nehmen daher von vorneherein $m > 0$ an.

zu (1). Wir führen Induktion nach $\#G$ und betrachten die Klassengleichung (Satz 2.35) für G :

$$\#G = \#Z_G + \sum_{i=1}^r \#(G/Z_{x_i}).$$

Wie üblich sei hier x_1, \dots, x_r ein Vertretersystem der Konjugationsklassen von G , die mehr als ein Element enthalten.

1. Fall: $p \mid \#Z_G$. Nach Lemma 2.23 existiert dann ein Element $g \in Z_G$ mit $\text{ord}(g) = p$. Weil g im Zentrum von G liegt, ist $\langle g \rangle \subseteq G$ ein Normalteiler, und der Quotient $G/\langle g \rangle$ hat Ordnung $p^{m-1}q$. Er besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine Untergruppe \bar{H} mit p^{k-1} Elementen. Sei $\pi: G \rightarrow G/\langle g \rangle$ die kanonische Projektion. Dann ist $H := \pi^{-1}(\bar{H})$ eine Untergruppe von G , die genau p^k Elemente hat, denn es gilt $H/\langle g \rangle \cong \bar{H}$, wie man leicht nachprüft.

2. Fall: $p \nmid \#Z_G$. In diesem Fall folgt aus der Klassengleichung, dass wenigstens einer der Summanden $\#(G/Z_{x_i})$ ebenfalls nicht durch p teilbar ist. Dann gilt aber $p^k \nmid \#Z_{x_i}$, und nach Induktionsvoraussetzung hat Z_{x_i} und damit auch G eine Untergruppe mit p^k Elementen.

zu (2). Wir betrachten die Operation von H durch Linksmultiplikation auf der Menge G/S der Nebenklassen von G nach S (wir setzen nicht voraus, dass S ein Normalteiler in G ist!), d.h. $h \in H$ bildet gS auf hgS ab. Da $\#(G/S) = \frac{\#G}{\#S} = q$ nicht durch p teilbar ist, aber H eine p -Gruppe ist, folgt aus Lemma 2.34, dass $g \in G$ existiert, so dass $hgS = gS$ für alle $h \in H$ gilt. Das bedeutet aber gerade $g^{-1}hg \in S$ für alle $h \in H$ oder mit anderen Worten, dass $H \subseteq gSg^{-1}$ ist.

zu (3). Sei nun X die Menge aller p -Sylow-Gruppen von G . Nach Teil (1) wissen wir, dass $X \neq \emptyset$ ist. Es ist klar, dass für $g \in G$ und $S \in X$ auch gSg^{-1} eine p -Sylow-Gruppe in G ist, denn $\#(gSg^{-1}) = \#S$. Also operiert G durch Konjugation auf X . Aus Teil (2) folgt, dass diese Operation transitiv ist, das bedeutet, dass zu $S, S' \in X$ stets ein Element $g \in G$ mit $S' = gSg^{-1}$ existiert. Es gibt also nur eine einzige Bahn unter der G -Wirkung auf X , und das liefert uns, wenn wir ein Element $S \in X$ fixieren, eine Bijektion $G/N_G(S) \rightarrow X$, die durch $g \mapsto gSg^{-1}$ induziert wird. Hier ist $N_G(S)$ der Stabilisator von S unter der Operation durch Konjugation – es handelt sich gerade um den Normalisator von S in G ,

$$N_G(S) = \{g \in G; gSg^{-1} = S\},$$

eine Untergruppe von G , die S enthält und in der S Normalteiler ist.

Weil S in $N_G(S)$ als Untergruppe enthalten ist, folgt

$$s_p = \#X = \#(G/N_G(S)) \mid q.$$

Um den Beweis abzuschließen, ist noch die Aussage $\#X \equiv 1 \pmod p$ zu zeigen. Wir betrachten nun die Operation von S auf X durch Konjugation; also dieselbe Wirkung wie vorher, aber eingeschränkt auf die Untergruppe S . Weil S eine p -Gruppe ist, folgt aus Lemma 2.34, dass $\#X \equiv \#(X^S) \pmod p$ gilt, wobei X^S die Menge der Fixpunkte unter S ist, also die Menge derjenigen p -Sylow-Gruppen S' , für die $gS'g^{-1} = S'$ für alle $g \in S$ gilt, mit anderen Worten, für die $S \subseteq N_G(S')$ gilt.

Es genügt dann zu zeigen, dass X^S als einziges Element S selbst enthält. Aber wenn $S' \in X$ mit $S \subseteq N_G(S')$ ist, dann sind S und S' auch p -Sylow-Gruppen in $N_G(S')$, folglich nach Teil (2) in $N_G(S')$ zueinander konjugiert. Weil aber jedes Element des Normalisators $N_G(S')$ die Gruppe S' in sich selbst konjugiert, folgt $S = S'$. \square

KOROLLAR 2.79. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl.

- (1) Jede Untergruppe von G , die eine p -Gruppe ist, ist in einer p -Sylow-Untergruppe enthalten.
- (2) Eine Untergruppe H ist genau dann eine p -Sylow-Untergruppe von G , wenn H eine p -Gruppe ist und es keine Untergruppe von G gibt, die eine p -Gruppe ist und H als echte Untergruppe enthält.
- (3) Hat G genau eine p -Sylow-Untergruppe H , dann ist H ein Normalteiler von G .
- (4) Ist G abelsch, so gibt es für jede Primzahl p genau eine p -Sylow-Gruppe in G .

BEISPIEL 2.80. Wir geben einige typische Anwendungen der Sylow-Sätze.

- (1) Jede Gruppe G der Ordnung 15 ist zyklisch (also isomorph zu $\mathbb{Z}/15$). Denn ist $g \in G$, so ist $\text{ord}(g) \in \{1, 3, 5, 15\}$. Wir wollen zeigen, dass der Fall $\text{ord}(g) = 15$ tatsächlich auftreten muss. Hat g Ordnung 3, so ist $\langle g \rangle$ eine 3-Sylow-Gruppe von G , und ist $\text{ord}(g) = 5$, dann ist $\langle g \rangle$ eine 5-Sylow-Gruppe.

Weil die Anzahl s_3 der 3-Sylow-Gruppen ein Teiler von 5 und kongruent zu 1 modulo 3 ist, folgt $s_3 = 1$. Ebenso sehen wir $s_5 = 1$. Es gibt also jeweils genau eine 3-Sylow-Gruppe und 5-Sylow-Gruppe, und folglich genau 2 Elemente der Ordnung 3 und genau 4 Elemente der Ordnung 5. Zusammen mit dem neutralen Element sind das aber nur 7 Elemente, die anderen 8 ($= \varphi(15)$) Elemente haben also Ordnung 15.

- (2) Ist G eine Gruppe mit 6 Elementen, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/6$ oder zu S_3 .

Es folgt aus den Sylow-Sätzen, dass G genau eine 3-Sylow-Untergruppe H hat. Diese muss die Form $\{1, \sigma, \sigma^2\}$ für ein Element $\sigma \in G$ der Ordnung 3 haben. Sei $H' = \{1, \tau\}$ eine 2-Sylow-Untergruppe, also $\tau \in G$ ein Element der Ordnung 2.

Wenn $\sigma\tau = \tau\sigma$ gilt, dann ist die Abbildung $f: H \times H' \rightarrow G, (h, h') \mapsto hh'$ ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern von f besteht (warum?) aus den Elementen der Form (h, h^{-1}) mit $h \in H \cap H' = \{1\}$, ist also trivial. Folglich ist f ein Isomorphismus. Aus dem chinesischen Restsatz (oder einfach, indem man direkt begründet, dass $\sigma\tau$ ein Element der Ordnung 6 ist) folgt $G \cong \mathbb{Z}/6$.

Wir betrachten nun den Fall, dass $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ ist. Weil H ein Normalteiler ist, muss dann (warum?) $\sigma\tau = \tau\sigma^2$ gelten. Es ist

$$G = H \cup \tau H = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$$

und mit ein wenig Rechnen ergibt sich, dass die Gruppenstruktur auf G durch die Gleichheiten $\sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^2$ vollständig festgelegt ist. Mit anderen Worten: Sind G, G' nicht-zyklische Gruppen mit 6 Elementen und $\sigma, \tau \in G$ und $\sigma', \tau' \in G'$ jeweils wie oben beschrieben gewählt, so gibt es genau einen Gruppenisomorphismus $G \xrightarrow{\sim} G'$ mit $\sigma \mapsto \sigma', \tau \mapsto \tau'$.

Wenden wir das auf die symmetrische Gruppe $G' := S_3$ an, so sehen wir, dass jede nicht-zyklische Gruppe mit 6 Elementen isomorph ist zu S_3 .

(Man kann an dieser Stelle die Benutzung der Sylow-Sätze recht leicht vermeiden, indem man direkt zeigt, dass es in G ein Element der Ordnung 3 und ein Element der Ordnung 2 geben muss und ausnutzt, dass jede Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler ist.)

◇

ERGÄNZUNG 2.81 (Eine p -Sylow-Gruppe in $GL_n(\mathbb{F}_p)$). Sei wieder p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p hat

$$(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$$

Elemente (denn für die erste Spalte einer invertierbaren Matrix kommt jeder Vektor aus $\mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ in Betracht; für die zweite Spalte jeder Vektor auf \mathbb{F}_p^n , der nicht in der von der ersten Spalte erzeugten Gerade liegt, usw.). Die maximale p -Potenz, die diese Zahl teilt, ist

$$p \cdot p^2 \cdots p^{n-1} = p^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Sei nun $U \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonaleinträge alle $= 1$ sind. Dies ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F}_p)$, wie man leicht nachrechnet. Es ist klar, dass

$$\#U = p^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

weil die $\frac{n(n-1)}{2}$ Einträge oberhalb der Diagonale frei wählbar sind, und alle anderen Einträge fest vorgegeben sind. Also ist U eine p -Sylow-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Weil jede endliche Gruppe in eine symmetrische Gruppe S_n eingebettet werden kann, die wiederum zur Untergruppe der Permutationsmatrizen in $GL_n(\mathbb{F}_p)$ isomorph ist, ist auch jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F}_p)$ (für geeignetes n). Das kann man benutzen, um einen anderen Beweis der Sylow-Sätze zu erhalten, siehe [Lo] Kapitel 10.

□ Ergänzung 2.81

ERGÄNZUNG 2.82 (Abelsche endliche Gruppen sind das Produkt ihrer Sylow-Untergruppen). Wie oben bemerkt gibt es in einer abelschen Gruppe G für jede Primzahl p genau eine p -Sylow-Untergruppe $G_p \subseteq G$. Nur für endlich viele p (nämlich diejenigen Primzahlen, die $\#G$ teilen) ist G_p nicht-trivial, und wir erhalten wegen der Kommutativität von G aus der Gruppenmultiplikation einen Gruppenhomomorphismus

$$\prod_p G_p \rightarrow G, \quad (g_p)_p \mapsto \prod_p g_p.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dieser injektiv ist, und weil beide Seiten dieselbe Mächtigkeit haben, handelt es sich um einen Isomorphismus.

Diese Aussage kann man als Vorstufe zum Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen betrachten. Siehe Beispiel 2.7 und [JS] Abschnitt II.5 für einen Beweis des Satzes, der von diesem Punkt ausgeht. (Die Begründung der Injektivität der obigen Abbildung finde ich dort allerdings etwas knapp.)

□ Ergänzung 2.82

ERGÄNZUNG 2.83 (Der Satz von Cauchy).

SATZ 2.84. Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $\#G$ teilt. Dann existiert ein Element $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = p$.

BEWEIS. Der Satz folgt leicht aus den Sylow-Sätzen. Denn es existiert in G eine p -Sylow-Gruppe H , die nicht die triviale Gruppe ist. Sei $g \in H \setminus \{1\}$. Dann ist $\text{ord}(g) = p^r$ für ein $r \geq 1$ und demzufolge hat $g^{p^{r-1}}$ Ordnung p .

Für einen direkten Beweis mithilfe der Klassengleichung siehe [JS] Satz II.1.2. Ein Beweis, der die Struktur der Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ ausnutzt, wird in [Soe] Übungsaufgabe 4.1.35 skizziert. \square

KOROLLAR 2.85. Seien p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe, so dass für alle $g \in G$ die Ordnung $\text{ord}(g)$ eine Potenz von p ist. Dann ist G eine p -Gruppe.

\square Ergänzung 2.83

2.8. Wie untersucht man eine Gruppe? *

In diesem Abschnitt sammle ich einige Ansätze, wie man eine Gruppe »verstehen« kann/könnte oder welche Fragen man üblicherweise stellt, um eine Gruppe zu untersuchen. Was *verstehen* genau bedeutet, kann dabei natürlich vom Kontext abhängen, und was ich hier schreibe, erhebt auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Ein erste Bemerkung ist, dass eine Gruppe G (jedenfalls im endlichen Fall) durch ihre Verknüpfungstabelle gegeben ist, oder mit anderen Worten (und auch ganz allgemein) durch die Angabe der Abbildung $G \times G \rightarrow G$. Nur diese Abbildung in der Hand zu haben, ist allerdings praktisch nutzlos, wenn man von den simpelsten Fällen absieht. (Genauso wie es schon »unmöglich« ist, in einfacher Weise anhand einer Verknüpfungstabelle nachzuprüfen, ob die gegebene Verknüpfung assoziativ ist.)

Stattdessen sollte man als erstes versuchen zu entscheiden, welche der *Eigenschaften von Gruppen*, die wir definiert haben, eine gegebene Gruppe G hat.

2.8.1. Endliche/unendliche Gruppen. Die Methoden, die wir in den vorherigen Abschnitten bereitgestellt haben, betreffen in erster Linie endliche Gruppen.

Für unendliche Gruppen ist es in vielen Fällen, in denen man die gegebene Gruppe gut verstehen kann, so, dass eine »zusätzliche Struktur« gegeben ist, zum Beispiel eine »Topologie«, die Struktur einer »Lie-Gruppe« oder einer »linearen algebraischen Gruppe«. Alle diese Gruppen spielen in der Algebra-Vorlesung keine Rolle und es ist auch nicht möglich, diesen Begriffen in ein paar Zeilen gerecht zu werden, daher belassen wir es bei dieser Bemerkung.

2.8.2. Eigenschaften von Gruppen. Die folgende Liste nennt einige der Eigenschaften von Gruppen, die wir kennengelernt haben. Jede der Eigenschaften impliziert alle darauf folgenden.

- (1) zyklisch von Primzahlordnung (dies sind genau die Gruppen $G \neq 1$, die außer $\{1\}$ und G keine Untergruppen haben),
- (2) zyklisch,
- (3) abelsch,
- (4) auflösbar.

Für eine beliebige endliche Gruppe G erhalten wir aus der Diskussion in Ergänzung 2.66, dass G eine Normalreihe besitzt, die nicht weiter verfeinert werden kann (eine sogenannte Kompositionsreihe), und dass die Länge sowie die Subquotienten einer solchen Kompositionsreihe (bis auf Reihenfolge und Isomorphie) eindeutig bestimmt sind. Die Subquotienten sind einfache Gruppen, und die endlichen einfachen Gruppen sind »im Prinzip« bekannt (Ergänzung 2.70).

2.8.3. Kleine Gruppen. Die Subquotienten einer Kompositionsreihe zu kennen, legt eine Gruppe allerdings nicht vollkommen fest, und daher bleibt es schwierig, auch für relativ kleine Zahlen n alle Gruppen der Ordnung n bis auf Isomorphie zu klassifizieren. Für $n = 2048$ weiß man zum Beispiel nicht, wie viele solche Isomorphieklassen es überhaupt gibt. Siehe [Wikipedia](#)⁹ für »ganz kleine« n .

Die Folge der Anzahlen der Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung n ist die *erste* Folge [A000001](#)¹⁰ in der OEIS, der *Online Encyclopedia of Integer Sequences*. Dort finden sich auch weitere Literaturverweise.

2.8.4. Darstellungstheorie. Ein besonders mächtiger Ansatz, um eine Gruppe zu »verstehen«, ist es, ihre *Darstellungen* im Sinne der folgenden Definition zu betrachten.

DEFINITION 2.86. Sei K ein Körper. Sei G eine Gruppe. Eine *Darstellung* von G über K ist ein Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ von G in die Automorphismengruppe eines K -Vektorraums V . –

Mit anderen Worten ist also eine Darstellung eine Gruppenwirkung auf einem K -Vektorraum durch Vektorraumautomorphismen. Es folgt (warum?) aus dem Satz von Cayley (Satz 2.54), dass zu jeder endlichen Gruppe G eine injektive Darstellung $G \rightarrow GL_n(K) \cong \text{Aut}_K(K^n)$ existiert.

Andererseits ist zum Beispiel die Quaternionengruppe Q (Ergänzung 2.8) nicht isomorph zu einer Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$. Das kann man mit Methoden der linearen Algebra zeigen, aber es ist nicht offensichtlich.

Für den Moment belasse ich es bei dieser kurzen Bemerkung zur Darstellung. Weitere Informationen finden Sie gegebenenfalls in den in der Box angegebenen Quellen.

Quellen zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen:

J. P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer 1977. Dieser Klassiker (ursprünglich auf französisch, und es gab auch eine deutsche Übersetzung) ist aus einer Vorlesung entstanden, die für Chemiker*innen gehalten wurde. Die Verbindung zur Chemie wird im Buch selbst kaum thematisiert, aber Gruppendarstellungen spielen auch in der Chemie eine Rolle, zum Beispiel bei der Untersuchung gewisser Molekülstrukturen und ihrer Symmetrien, und bei der Untersuchung von Kristallen.

B. Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*, Springer 2012

<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0776-8>

G. James, M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge Univ. Press 2005.

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_small_groups

¹⁰<https://oeis.org/A000001>

ANHANG A

Zusammenfassung *

Die Definitionen und Ergebnisse, die wir aus der Linearen Algebra wiederholt haben, sind in der Zusammenfassung nicht noch einmal aufgeführt.

A.I. Gruppen

A.I.I. Gruppenwirkungen.

DEFINITION A.1. Seien G eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Wirkung* (oder: *Operation*) ist eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ für alle $g, h \in G$ und alle $x \in X$,
- (b) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in X$ (wobei $1 \in G$ das neutrale Element bezeichne).

+

In äquivalenter Weise können wir eine Wirkung von G auf X als einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ betrachten; die Beziehung zwischen den beiden Sichtweisen ist durch $\varphi(g)(x) = g \cdot x$ gegeben. Oft schreibt man statt $g \cdot x$ auch einfach gx (oder benutzt gegebenenfalls ein anderes Symbol).

DEFINITION A.2. Sei $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ eine Gruppenwirkung.

- (1) Die *Bahn* (oder: der *Orbit*) eines Elements $x \in X$ unter der Gruppe G ist die Teilmenge

$$Gx := \{gx; g \in G\} \subseteq X.$$

- (2) Der *Stabilisator* eines Elements x ist die Untergruppe

$$\text{Stab}_G(x) := \{g \in G; gx = x\}$$

von G .

+

BEISPIEL A.3. Sei G eine Gruppe. Dann ist $G \times G \rightarrow G, g \bullet h := ghg^{-1}$ eine Gruppenwirkung, die *Wirkung durch Konjugation* von G auf sich selbst.

Die Bahnen unter dieser Operation heißen die *Konjugationsklassen* der Gruppe G . Den Stabilisator eines Elements $h \in G$ unter der Konjugationswirkung nennen wir den *Zentralisator* von h und bezeichnen ihn mit Z_h . Es gilt also

$$Z_h = \{g \in G; ghg^{-1} = h\} = \{g \in G; gh = hg\}.$$

Allgemeiner sei für eine Teilmenge $S \in G$ der Zentralisator von S definiert als

$$Z_S = \bigcap_{h \in S} Z_h = \{g \in G; gh = hg \text{ für alle } h \in S\},$$

also als die Untergruppe von G derjenigen Elemente, die mit allen Elementen aus S kommutieren. Den Zentralisator der ganzen Gruppe G nennt man das *Zentrum* von G ; dies ist ein abelscher Normalteiler in G . \diamond

In der Situation der obigen Definition induziert für jedes $x \in X$ die Abbildung $g \mapsto gx$ eine Bijektion $G/\text{Stab}_G(x) \rightarrow Gx$. Da X die disjunkte Vereinigung aller Bahnen unter G ist, folgt insbesondere:

SATZ A.4 (Bahnengleichung). Sei G eine Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Sei x_1, \dots, x_r ein Vertretersystem der Bahnen von X auf G , d.h. zu jeder Bahn $B \subset X$ in X unter G existiere ein eindeutig bestimmtes i mit $x_i \in B$. Dann gilt

$$\#X = \sum_{i=1}^r \#Gx_i = \sum_{i=1}^r \#(G/\text{Stab}_G(x_i)).$$

Im speziellen Fall der Wirkung einer endlichen Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation erhalten wir:

SATZ A.5 (Klassengleichung). Sei G eine endliche Gruppe und sei g_1, \dots, g_r ein Vertretersystem derjenigen Konjugationsklassen in G , die aus mehr als einem Element bestehen. Dann gilt

$$\#G = \#Z_G + \sum_{i=1}^r \#(G/Z_{x_i}).$$

DEFINITION A.6. Eine Gruppenoperation heißt *transitiv*, wenn es nur eine einzige Bahn gibt. \dashv

A.1.2. Zyklische Gruppen.

DEFINITION A.7. Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn $g \in G$ existiert mit

$$G = \langle g \rangle = \{g^i; i \in \mathbb{Z}\}.$$

\dashv

SATZ A.8. Sei G eine Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) die Gruppe G ist zyklisch,
- (ii) es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow G$,
- (iii) G ist isomorph zu einer der Gruppen
 - (1) \mathbb{Z} ,
 - (2) \mathbb{Z}/n für $n \geq 1$.
- (iv) zu jedem Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ existiert genau eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit d Elementen.

Die Erzeuger von \mathbb{Z} sind 1 und -1 . Die Erzeuger von \mathbb{Z}/n sind (für $n > 0$) die Restklassen von zu n teilerfremden Zahlen, also die Elemente von $(\mathbb{Z}/n)^\times$.

SATZ A.9. Untergruppen und Quotienten von zyklischen Gruppen sind zyklisch. Insbesondere gilt: Ist $\varphi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und ist G zyklisch, so sind $\text{Ker}(\varphi)$ und $\text{Im}(\varphi)$ zyklisch.

THEOREM A.10. Sei G eine endliche Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) die Gruppe G ist zyklisch,
- (ii) zu jedem Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ existiert genau eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit d Elementen,
- (iii) zu jedem Teiler d der Gruppenordnung $\#G$ existiert höchstens eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit d Elementen.

SATZ A.11. Sei K ein Körper und sei $G \subseteq K^\times$ eine endliche Untergruppe. Dann ist G zyklisch.

A.1.3. Die symmetrische Gruppe. Wir bezeichnen mit S_n die *symmetrische Gruppe* »auf n Buchstaben«, also die Gruppe der Bijektionen $\{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$. Aus der Linearen Algebra kennen wir den Begriff des r -Zykels, Definition LAI.8.36.

SATZ A.12 (Zerlegung in disjunkte Zykel). *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Zykeln mit paarweise disjunkten Trägern schreiben. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.*

Jeder Permutation σ können wir ihr *Signum* oder *Vorzeichen* $\text{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ zuordnen. Die Signumsabbildung $S_n \rightarrow \{1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

DEFINITION A.13. Wir schreiben $A_n = \text{Ker}(\text{sgn})$ und nennen diesen Normalteiler von S_n die *alternierende Gruppe*. ⊖

A.1.4. Auflösbare Gruppen.

DEFINITION A.14. Sei G eine Gruppe.

(1) Für Elemente $g, h \in G$ heißt

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$$

der *Kommutator* der Elemente g und h .

(2) Für Untergruppen $H, H' \subseteq G$ bezeichnen wir mit $[H, H']$ die von allen Elementen der Form $[h, h'], h \in H, h' \in H'$ erzeugte Untergruppe von G .

(3) Die Untergruppe $[G, G] \subseteq G$, also die von allen Elementen der Form $[g, h], g, h \in G$, erzeugte Untergruppe von G , heißt die *Kommutatoruntergruppe* von G . ⊖

SATZ A.15. *Sei G eine Untergruppe. Dann ist $[G, G]$ ein Normalteiler von G und der Quotient $G_{ab} = G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe und hat die folgende universelle Eigenschaft (und heißt deshalb der maximale abelsche Quotient der Gruppe G):*

Ist H eine abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so faktorisiert f eindeutig über G_{ab} .

DEFINITION A.16. Sei G eine Gruppe. Wir nennen G *auflösbar*, wenn eine Kette

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r = \{1\}$$

von Untergruppen von G existiert, so dass für alle i die Untergruppe G_{i+1} ein Normalteiler von G_i ist und der Quotient G_i/G_{i+1} eine abelsche Gruppe ist. ⊖

LEMMA A.17. *Sei G eine Gruppe. Sei $D^0 G = G, D^1 G := [G, G]$, und allgemein $D^i G = [D^{i-1} G, D^{i-1} G]$ für $i \geq 1$. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Gruppe G ist auflösbar.*
- (ii) *Es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $D^n G$ die triviale Gruppe ist.*

LEMMA A.18. (1) *Sei G eine auflösbare Gruppe. Dann ist jede Untergruppe von G auflösbar.*

(2) *Sei G eine Gruppe und sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Gruppe G ist auflösbar.*
 - (ii) *Die Gruppen H und G/H sind auflösbar.*
- (3) *Seien G_1, \dots, G_n Gruppen. Das Produkt $\prod_{i=1}^n G_i$ ist genau dann auflösbar, wenn alle $G_i, i = 1, \dots, n$, auflösbar sind.*

LEMMA A.19. Sei G eine endliche Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Gruppe G ist auflösbar.
- (ii) Es existiert eine Kette

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r = G$$

von Untergruppen von G , so dass für alle i die Untergruppe G_i ein Normalteiler von G_{i+1} ist und der Quotient G_{i+1}/G_i eine zyklische Gruppe ist.

SATZ A.20. (1) Für $n \leq 4$ sind S_n und A_n auflösbar.

(2) Für $n > 4$ sind weder S_n noch A_n auflösbar.

A.1.5. Die Sylow-Sätze.

DEFINITION A.21. Seien p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Wir nennen G eine p -Gruppe, wenn die Ordnung von G eine Potenz von p ist. \dashv

SATZ A.22. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

DEFINITION A.23. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl. Sei $\#G = p^r m$ mit $p \nmid m$. Unter einer p -Sylow-Untergruppe von G verstehen wir eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $\#H = p^r$. \dashv

Mit anderen Worten ist also eine p -Sylow-Untergruppe von G eine Untergruppe H von G , die eine p -Gruppe ist und so dass $\#G/H$ nicht durch p teilbar ist.

BEISPIEL A.24. Seien $n \in \mathbb{N}$, p eine Primzahl und $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$. Die Untergruppe U der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonaleinträge alle $= 1$ sind, ist eine p -Sylow-Untergruppe von G . \diamond

SATZ A.25 (Sylow-Sätze). Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl.

- (1) Die Gruppe G besitzt eine p -Sylow-Untergruppe.
- (2) Je zwei p -Sylow-Untergruppen von G sind zueinander konjugiert.
- (3) Sei s_p die Anzahl der p -Sylow-Untergruppen von G . Dann gilt

$$s_p \mid \#G \quad \text{und} \quad s_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

KOROLLAR A.26. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl.

- (1) Jede Untergruppe von G , die eine p -Gruppe ist, ist in einer p -Sylow-Untergruppe enthalten.
- (2) Eine Untergruppe H ist genau dann eine p -Sylow-Untergruppe von G , wenn H eine p -Gruppe ist und es keine Untergruppe von G gibt, die eine p -Gruppe ist und H als echte Untergruppe enthält.

A.2. Ringe

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, verstehen wir in dieser Vorlesung unter einem Ring stets einen kommutativen Ring.

A.2.1. Ideale, Primideale, maximale Ideale.

LEMMA A.27. Seien K ein Körper, $R \neq 0$ ein Ring und $\varphi: K \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist φ injektiv.

SATZ A.28. Sei R ein Ring und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{b} \subseteq R \text{ Ideal}; \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\} &\xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{c} \subseteq R/\mathfrak{a} \text{ Ideal}\} \\ \mathfrak{b} &\mapsto \pi(\mathfrak{b}), \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) &\leftarrow \mathfrak{c}, \end{aligned}$$

zueinander inverse, inklusionserhaltende Bijektionen.

DEFINITION A.29. Sei R ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt *Primideal*, wenn $\mathfrak{p} \neq R$ gilt und wenn für alle $x, y \in R$ gilt: Falls $xy \in \mathfrak{p}$, dann ist $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. \dashv

LEMMA A.30. Seien R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (i) der Quotient R/\mathfrak{p} ist ein Integritätsring,
- (ii) das Ideal \mathfrak{p} ist ein Primideal.

DEFINITION A.31. Sei K ein Körper. Wir sagen, K habe *Charakteristik 0*, wenn der eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow K$ injektiv ist, und habe *Charakteristik p* , wenn sein Kern von der Primzahl p erzeugt wird. \dashv

SATZ A.32. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die Abbildung

$$K \rightarrow K, \quad x \mapsto x^p,$$

ein Körperhomomorphismus, der sogenannte Frobenius-Homomorphismus von K .

DEFINITION A.33. Sei R ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ heißt *maximales Ideal*, wenn $\mathfrak{m} \neq R$ ist und \mathfrak{m} maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich der Inklusion von Idealen ist, d.h. wenn für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq R$ gilt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{a} = R$. \dashv

LEMMA A.34. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (i) der Quotient R/\mathfrak{m} ist ein Körper,
- (ii) das Ideal \mathfrak{m} ist ein maximales Ideal.

Insbesondere ist jedes maximale Ideal ein Primideal.

SATZ A.35. Sei R ein Hauptidealring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, das nicht das Nullideal ist. Dann ist \mathfrak{p} ein maximales Ideal von R .

SATZ A.36. Sei R ein Ring und sei $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein Ideal. Dann besitzt R ein maximales Ideal, das \mathfrak{a} enthält. Insbesondere besitzt jeder Ring $R \neq 0$ ein maximales Ideal.

Der Beweis beruht auf dem Lemma von Zorn, siehe Abschnitt LA1.B.1.

A.2.2. Polynomringe.

DEFINITION A.37. Sei R ein (kommutativer) Ring.

- (1) Eine R -Algebra ist ein (kommutativer) Ring S zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow S$.
- (2) Seien S, S' mit Ringhomomorphismen $\varphi: R \rightarrow S, \varphi': R \rightarrow S'$ Algebren über R . Ein *Homomorphismus von R -Algebren* ist ein Ringhomomorphismus $\psi: S \rightarrow S'$, so dass $\varphi = \varphi' \circ \psi$ gilt.

Wir bezeichnen mit $\text{Hom}_R(S, S')$ die Menge aller R -Algebren-Homomorphismen von S nach S' . Besonders dann, wenn R ein Körper ist, sprechen wir statt von einem R -Algebren-Homomorphismus auch einfach von einem K -Homomorphismus.

—

Ist K ein Körper und A eine K -Algebra, gegeben durch einen Ringhomomorphismus $\varphi: K \rightarrow A$, so können wir A als K -Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $x \cdot a := \varphi(x)a$ verstehen (für $x \in K, a \in A$, und wobei rechts die Ringmultiplikation von A verwendet wird). Es ist leicht nachzurechnen, dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind. Ist andererseits A ein Ring, der auch ein K -Vektorraum ist, stimmen Ring- und Vektorraumaddition überein und gilt $x(ab) = (xa)b = a(xb)$ für alle $x \in K, a, b \in A$, so trägt A eine K -Algebrenstruktur, nämlich $K \rightarrow A, x \mapsto x \cdot 1$. Verwendet man den Begriff des R -Moduls (siehe Abschnitt LA2.18.7.1) so kann man den Begriff der R -Algebra auch für beliebige kommutative Ringe in analoger Weise betrachten.

Wir verallgemeinern die Konstruktion des Polynomrings über einem Ring in einer Variablen, indem wir auch mehrere Variablen zulassen (gegebenenfalls auch unendlich viele). Ist I die vorgegebene Indexmenge für die Variablen, so sind die Elemente des Polynomrings $R[X_i, i \in I]$ »Linearkombinationen« von Ausdrücken der Form $X_{i_1}^{n_1} \cdots X_{i_r}^{n_r}$ für $r \in \mathbb{N}, i_s \in I, n_s \in \mathbb{N}_{>0}$. (In jedem einzelnen Polynom treten also immer nur endlich viele Variablen auf. Der Ring ist kommutativ, d.h. die Variablen kommutieren miteinander und mit Skalaren aus R .) Polynome werden in der offensichtlichen Weise addiert. Die Multiplikation ist durch die Regel

$$X_{i_1}^{m_1} \cdots X_{i_r}^{m_r} \cdot X_{i_1}^{n_1} \cdots X_{i_r}^{n_r} = X_{i_1}^{m_1+n_1} \cdots X_{i_r}^{m_r+n_r}$$

und die Distributivgesetze eindeutig bestimmt (wobei wir hier auch 0 als Exponenten zulassen und $X_i^0 = 1$ setzen).

Den Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ in endlich vielen Variablen X_1, \dots, X_n kann man identifizieren mit $(R[X_1, \dots, X_{n-1}])[X_n]$, so dass man diese Ringe auch induktiv konstruieren kann. Im Fall unendlich vieler Variablen ist dies allerdings nicht ohne weiteres möglich. In jedem Fall haben wir den Begriff des Einsetzungshomomorphismus, der auch als universelle Eigenschaft des Polynomrings betrachtet werden kann:

DEFINITION A.38. Sei R ein kommutativer Ring und I eine Menge. Dann existiert eine R -Algebra P zusammen mit Elementen $X_i \in P, i \in I$, so dass für alle R -Algebren S die Abbildung

$$\text{Hom}_R(P, S) \rightarrow \text{Abb}(I, S), \quad f \mapsto (i \mapsto f(X_i)),$$

bijektiv ist.

Die R -Algebra P ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus im folgenden Sinne: Ist P' zusammen mit Elementen $X'_i \in P'$ eine R -Algebra, die ebenfalls die obige Eigenschaft besitzt, so existiert ein eindeutig bestimmter R -Algebren-Isomorphismus $P \rightarrow P'$ mit $X_i \mapsto X'_i$ für alle i .

Wir schreiben auch $R[X_i, i \in I] := P$ und nennen diesen Ring den *Polynomring über R in den Variablen $X_i, i \in I$* . \dashv

DEFINITION A.39. Sei R ein Ring, $f \in R[X]$ ein Polynom und $\varphi: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\alpha \in S$.

- (1) Das Element α heißt *Nullstelle* von f (in S), wenn $f(\alpha) = 0$ gilt. Wir fassen hierbei vermöge φ als Element von $S[X]$ auf, wenden also auf alle Koeffizienten von f den Homomorphismus φ an.
- (2) Sei nun in der obigen Situation S ein Integritätsring und $f \neq 0$. Die eindeutig bestimmte natürliche Zahl m mit $(X - \alpha)^m \mid f$ und $(X - \alpha)^{m+1} \nmid f$ heißt die *Vielfachheit* (oder *Ordnung*) von α als Nullstelle von f ; wir schreiben $\text{mult}_\alpha(f) := m$.

\dashv

Es ist also α genau dann eine Nullstelle von f , wenn $\text{mult}_\alpha(f) \geq 1$ gilt. Im Fall $\text{mult}_\alpha(f) = 1$ nennen wir α auch eine *einfache Nullstelle*, falls $\text{mult}_\alpha(f) > 1$ ist, so heißt α eine *mehrfache Nullstelle*. Genauer sprechen wir im Fall $\text{mult}_\alpha(f) = 2$ von einer *doppelten Nullstelle*, usw.

DEFINITION A.40. Sei R ein Ring. Die (*formale*) *Ableitung* eines Polynoms $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$ ist das Polynom

$$f' := \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} \in R[X].$$

\dashv

LEMMA A.41. Sei R ein Ring. Die Bildung der Ableitung von Polynomen genügt den folgenden Rechenregeln. Hier seien $f, g \in R[X], a \in R$.

- (1) $(af)' = a \cdot f'$,
- (2) $(f + g)' = f' + g'$,
- (3) $(fg)' = f'g + fg'$.

LEMMA A.42. Sei R ein Ring, $f \in R[X], f \neq 0$, und $\alpha \in R$ eine Nullstelle von f . Dann sind äquivalent:

- (i) α ist eine *mehrfache Nullstelle* von f ,
- (ii) $f'(\alpha) = 0$.

A.2.3. Der Satz von Gauß.

DEFINITION A.43. Sei R ein faktorieller Ring und sei p ein Primelement von R . Sei K der Quotientenkörper von R .

Für $x \in K^\times$ schreiben wir $v_p(x)$ für die eindeutig bestimmte ganze Zahl m , so dass sich x in der Form $x = p^m y$ für ein $y \in K^\times$ schreiben lässt, in dessen Darstellung als gekürzter Bruch weder der Zähler noch der Nenner durch p teilbar sind. Außerdem setzen wir $v_p(0) = \infty$. \dashv

Sind in der Situation der Definition $p, p' \in R$ zueinander assoziierte Primelemente, so gilt $v_p(x) = v_{p'}(x)$ für alle $x \in K$. Es ist genau dann $x \in R$, wenn $v_p(x) \geq 0$ für alle Primelemente p von R gilt. Äquivalent genügt es, diese Bedingung für alle Elemente eines Vertretersystems der Primelemente bis auf Assoziiertheit nachzuprüfen.

LEMMA A.44. Sei R ein faktorieller Ring und sei p ein Primelement von R . Sei K der Quotientenkörper von R und seien $x, y \in K$. Dann gilt:

- (1) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,
 (2) $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

DEFINITION A.45. Sei R ein faktorieller Ring und sei p ein Primelement von R . Sei K der Quotientenkörper von R .

Für $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ definieren wir

$$v_p(f) := \min\{v_p(a_i); i = 0, \dots, n\}.$$

⊖

Es gilt dann also für $f \in K[X]: f \in R[X]$ genau dann, wenn $v_p(f) \geq 0$ für alle Primelemente p von R .

LEMMA A.46 (Lemma von Gauß). Sei R ein faktorieller Ring und sei p ein Primelement von R . Sei K der Quotientenkörper von R und seien $f, g \in K[X]$. Dann gilt: $v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$.

KOROLLAR A.47. Sei R ein faktorieller Ring und sei $h \in R[X]$ normiert. Ist dann $h = fg$ eine Zerlegung von h als Produkt von normierten Polynomen $f, g \in K[X]$ so gilt $f, g \in R[X]$.

DEFINITION A.48. Sei R ein faktorieller Ring. Ein Polynom $f \in R[X]$ heißt *primitiv*, wenn $f \neq 0$ und wenn 1 ein größter gemeinsamer Teiler der Koeffizienten von f ist. ⊖

SATZ A.49 (Satz von Gauß). Sei R ein faktorieller Ring, und sei K der Quotientenkörper von R . Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ faktoriell.

Ein Element $f \in R[X]$ ist genau dann irreduzibel, wenn

- (a) $\deg(f) = 0$ und f als Element von R irreduzibel ist, oder
 (b) $\deg(f) > 0$, f primitiv und f als Element von $K[X]$ irreduzibel ist.

A.2.4. Irreduzibilitätskriterien.

SATZ A.50 (Reduktionskriterium). Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K , sei $p \in R$ ein Primelement und sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$, so dass a_n nicht von p geteilt wird. Wenn das Bild von f in $(R/p)[X]$ irreduzibel ist, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

Wird zusätzlich f als primitiv vorausgesetzt, so folgt, dass f in $R[X]$ irreduzibel ist.

SATZ A.51 (Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein). Seien R ein faktorieller Ring und K sein Quotientenkörper, sei $p \in R$ ein Primelement und sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$ ein primitives Polynom vom Grad $n > 0$. Es gelte

$$p \mid a_i, i = 0, \dots, n-1, \quad p^2 \nmid a_0.$$

Dann ist f irreduzibel in $R[X]$ und folglich auch irreduzibel in $K[X]$.

A.3. Algebraische Körpererweiterungen

A.3.1. Algebraische und endliche Körpererweiterungen.

DEFINITION A.52. Ist K ein Teilkörper eines Körpers L , so nennen wir auch L einen *Erweiterungskörper* von K und sprechen von der *Körpererweiterung* L/K .

Ist E ein Teilkörper von L , der seinerseits K als Teilkörper enthält, $K \subseteq E \subseteq L$, so heißt E ein *Zwischenkörper* der Erweiterung L/K . ⊖

Manchmal betrachten wir nicht nur die Inklusion eines Teilkörpers in einem Erweiterungskörper sondern allgemeiner auch einen (notwendigerweise injektiven) Körperhomomorphismus als Körpererweiterung.

DEFINITION A.53. Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei $M \subseteq L$ eine Teilmenge.

- (1) Die von M erzeugte K -Algebra ist der kleinste Unterring von L , der K und M enthält. Äquivalent ist dies das Bild des Einsetzungshomomorphismus $K[X_m, m \in M] \rightarrow L$, $X_m \mapsto m$, also die Menge aller polynomialen Ausdrücke in den Elementen von M mit Koeffizienten in K . Wir bezeichnen diese K -Algebra mit $K[M]$.
- (2) Der über K von M erzeugte Teilkörper von L ist der kleinste Teilkörper von L , der K und L enthält. Dieser kann mit dem Quotientenkörper von $K[M]$ identifiziert werden. Wir bezeichnen diesen Teilkörper von L mit $K(M)$.

+

Es gilt also stets $K[M] \subseteq K(M)$. Wir werden unten die Bedingung, dass hier Gleichheit besteht, genauer untersuchen.

DEFINITION A.54. Eine Körpererweiterung L/K heißt *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Teilmenge $M \subseteq L$ mit $L = K(M)$ existiert.

+

DEFINITION A.55. Sei L/K eine Körpererweiterung.

- (1) Ein Element $\alpha \in L$ heißt *algebraisch über K* , wenn ein Polynom $p \in K[X] \setminus \{0\}$ existiert mit $p(\alpha) = 0$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades in $K[X]$, das α als Nullstelle hat, heißt dann das *Minimalpolynom* von α über K .
Wir bezeichnen das Minimalpolynom von α über K mit $\text{minpol}_{\alpha, K}$.
- (2) Ein Element $\alpha \in L$, das nicht algebraisch über K ist, heißt *transzendent*.
- (3) Die Körpererweiterung L/K heißt *algebraisch*, wenn jedes Element von L über K algebraisch ist. Andernfalls heißt die Erweiterung *transzendent*.

+

Ist $\alpha \in L$ algebraisch über K , so ist $K[\alpha] \cong K[X] / (\text{minpol}_{\alpha, K})$ ein Körper, und es gilt folglich $K[\alpha] = K(\alpha)$.

DEFINITION A.56. Sei L/K eine Körpererweiterung.

- (1) Die Vektorraumdimension von L als K -Vektorraum heißt auch der *Grad* der Erweiterung L/K und wird mit $[L : K]$ bezeichnet.
- (2) Die Erweiterung L/K heißt *endlich*, wenn ihr Grad endlich ist, andernfalls *unendlich*.

+

SATZ A.57 (Gradformel). Seien L/K und M/L Körpererweiterungen. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Erweiterungen M/L und L/K sind endlich.
- (ii) Die Erweiterung M/K ist endlich.

In diesem Fall gilt

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

LEMMA A.58. Sei L/K eine Körpererweiterung, $a \in L$. Dann sind äquivalent:

- (i) Das Element a ist algebraisch über K .
- (ii) Die Erweiterung $K(a)/K$ ist endlich.
- (iii) Es gilt $K[a] = K(a)$.
- (iv) Der Unterring $K[a]$ von L ist ein Körper.

SATZ A.59. Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Erweiterung L/K ist endlich.
- (ii) Die Erweiterung L/K ist algebraisch und endlich erzeugt.

SATZ A.60. Seien L/K und M/L Körpererweiterungen. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Erweiterungen M/L und L/K sind algebraisch.
- (ii) Die Erweiterung M/K ist algebraisch.

A.3.2. Die Existenz eines algebraischen Abschlusses.

SATZ A.61. Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad > 0 . Dann gibt es einen Erweiterungskörper L von K , in dem f eine Nullstelle besitzt.

Ist f irreduzibel, so können wir $L := K[X]/(f)$ setzen.

Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom. Für einen Erweiterungskörper L von K bezeichnen wir mit $V(f, L) \subseteq L$ die Menge der Nullstellen von f in L .

SATZ A.62. Die Abbildung

$$\text{Hom}_K(K[\alpha], L) \rightarrow L, \quad \varphi \mapsto \varphi(\alpha),$$

induziert eine Bijektion

$$\text{Hom}_K(K[\alpha], L) \xrightarrow{\sim} V(\text{minpol}_{\alpha, K}, L).$$

DEFINITION A.63. Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ besitzt eine Nullstelle in K .
- (ii) Jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren.

⊥

THEOREM A.64. Sei K ein Körper. Dann existiert ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper L von K . Man kann zudem erreichen, dass die Erweiterung L/K algebraisch ist. In diesem Fall nennt man L einen algebraischen Abschluss von K .

SATZ A.65. Seien K ein Körper, L/K eine algebraische Körpererweiterung und sei $\varphi: K \rightarrow E$ ein Körperhomomorphismus von K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper E .

- (1) Dann existiert eine Fortsetzung von φ zu einem Körperhomomorphismus $\psi: L \rightarrow E$ (d.h. es gilt $\psi(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in K$).
- (2) Ist zusätzlich L algebraisch abgeschlossen und E algebraisch über K , so ist jede Fortsetzung wie in Teil (1) ein Isomorphismus.

Auch wenn die Aussage des Satzes an die Sprechweise der universellen Eigenschaft erinnert, handelt es sich hier *nicht* um eine universelle Eigenschaft, weil die Eindeutigkeit des Homomorphismus ψ in Teil (1) nicht gegeben ist. Es folgt daher *nicht*, dass zwischen zwei algebraischen Abschlüssen von K ein eindeutig bestimmter K -Isomorphismus existiere (und das ist in aller Regel auch nicht der Fall), sondern nur, dass es (irgend-)einen solchen Isomorphismus gibt.

A.4. Galois-Theorie

A.4.1. Normale Körpererweiterungen.

DEFINITION A.66. Sei K ein Körper und sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Polynomen in $K[X]$.

Ein Erweiterungskörper L von K heißt *Zerfällungskörper* der Familie $(f_i)_i$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Jedes f_i zerfällt über L vollständig in Linearfaktoren und
- (b) die Körpererweiterung L/K wird von den Nullstellen der Polynome f_i erzeugt.

⊖

SATZ A.67. Sei K ein Körper und sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Polynomen in $K[X]$.

- (1) Es existiert ein Zerfällungskörper der gegebenen Familie von Polynomen.
- (2) Sind L und L' Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_i$, so existiert ein K -Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} L'$.

Man beachte, dass der Isomorphismus in Teil (2) des Satzes in aller Regel nicht eindeutig bestimmt ist.

DEFINITION A.68. Eine Körpererweiterung L/K heißt *normal*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind. Hier bezeichne \bar{L} einen fixierten algebraischen Abschluss von L .

- (i) Es gibt eine Familie von Polynomen in $K[X]$, derart dass L ein Zerfällungskörper dieser Familie ist.
- (ii) Für jeden K -Homomorphismus $\varphi: L \rightarrow \bar{L}$ gilt $\text{Im}(\varphi) \subseteq L$.
- (iii) Ist $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, das in L eine Nullstelle besitzt, so zerfällt f über L vollständig in Linearfaktoren.

⊖

BEISPIEL A.69. (1) Quadratische Erweiterungen (also Erweiterungen vom Grad 2) sind normal.

(2) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

(3) Ist \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K , so ist die Erweiterung \bar{K}/K normal.

◇

LEMMA A.70. Seien E/K und L/E Körpererweiterungen. Ist die Erweiterung L/K normal, so ist auch die Erweiterung L/E normal.

SATZ A.71. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.

- (1) Dann existiert ein Erweiterungskörper L' von L , so dass die Erweiterung L'/K normal ist, und so dass kein echter Teilkörper von L' , der K enthält, normal über K ist. Der Körper L' ist bis auf K -Isomorphismus eindeutig bestimmt.
- (2) Ist die Erweiterung L/K endlich, so ist auch L'/K endlich.
- (3) Ist M/K eine normale Erweiterung, so dass L in M enthalten ist, so ist der von allen $\sigma(L)$, $\sigma \in \text{Hom}_K(L, M)$, über K erzeugte Teilkörper von M der eindeutig bestimmte Zwischenkörper von M/K , der die Eigenschaft in Teil (1) hat.

Wir nennen L' eine normale Hülle der Erweiterung L/K (bzw. in der Situation von Teil (3) die normale Hülle von L/K in M).

A.4.2. Separable Körpererweiterungen.

DEFINITION A.72. Sei K ein Körper und \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K . Ein Polynom $f \in K[X]$ heißt *separabel*, wenn f in \bar{K} nur einfache Nullstellen hat. \dashv

Die Eigenschaft, separabel zu sein, ist unabhängig von der Wahl eines algebraischen Abschlusses von K .

SATZ A.73. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist separabel,
- (ii) $f' \neq 0$.

Insbesondere gilt: Über einem Körper der Charakteristik 0 ist jedes irreduzible Polynom separabel.

SATZ A.74. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $f \in K[X]$ irreduzibel. Sei $r \in \mathbb{N}$ maximal mit der Eigenschaft, dass f die Form $g(X^{p^r})$ für ein Polynom $g \in K[X]$ hat. Dann ist g durch f eindeutig bestimmt, separabel und irreduzibel.

Jede Nullstelle von f hat die Vielfachheit p^r , und die Nullstellen von f (in einem algebraischen Abschluss \bar{K} von K) sind gerade die p^r -ten Wurzeln der Nullstellen von g .

DEFINITION A.75. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.

- (1) Ein Element $a \in L$ heißt *separabel über K* , wenn ein separables Polynom $p \in K[X] \setminus \{0\}$ existiert mit $p(a) = 0$. Es ist äquivalent zu fordern, dass das Minimalpolynom von a über K separabel sei.
- (2) Ein Element $a \in L$, das nicht algebraisch über K ist, heißt auch *inseparabel*.
- (3) Die Körpererweiterung L/K heißt *separabel*, wenn jedes Element von L über K separabel ist.
- (4) Ist die Erweiterung L/K nicht separabel, so heißt sie *inseparabel*. Ist sogar jedes Element von L , das nicht in K liegt, inseparabel über K , dann nennt man die Erweiterung L/K *rein inseparabel*. \dashv

DEFINITION A.76. Ein Körper K heißt *perfekt* (oder: *vollkommen*), wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist. \dashv

Nach dem oben gesagten ist jeder Körper von Charakteristik 0 ein perfekter Körper. In positiver Charakteristik haben wir die folgende Charakterisierung.

SATZ A.77. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann sind äquivalent:

- (i) Der Körper K ist perfekt.
- (ii) Jede endliche Erweiterung von K ist separabel.
- (iii) Der Frobenius-Homomorphismus $K \rightarrow K, x \mapsto x^p$, ist surjektiv (und folglich ein Isomorphismus).

KOROLLAR A.78. Jeder endliche Körper ist perfekt.

DEFINITION A.79. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K . Dann heißt

$$[L : K]_s := \# \text{Hom}_K(L, \bar{K})$$

der *Separabilitätsgrad* der Erweiterung L/K . \dashv

LEMMA A.80. Seien E/K und L/E endliche Körpererweiterungen. Dann gilt

$$[L : K]_s = [L : E]_s [E : K]_s.$$

Für jede endliche Körpererweiterung L/K gilt $[L : K]_s \leq [L : K]$.

SATZ A.81. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Es sind äquivalent:

- (i) Die Erweiterung L/K ist separabel.
- (ii) Es gilt $[L : K]_s = [L : K]$.
- (iii) Es gibt separable Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$ mit $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

KOROLLAR A.82. Seien E/K und L/E algebraische Körpererweiterungen. Dann ist äquivalent:

- (i) Die Erweiterung L/K ist separabel.
- (ii) Die Erweiterungen E/K und L/E sind separabel.

SATZ A.83 (Satz vom primitiven Element). Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Dann existiert $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$. Wir nennen α ein primitives Element der Erweiterung L/K .

A.4.3. Endliche Körper.

SATZ A.84. Sei K ein endlicher Körper. Dann hat K positive Charakteristik p und die Anzahl der Elemente von K ist eine Potenz von p .

SATZ A.85. Sei p eine Primzahl. Zu jedem $r \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es einen Körper mit $q := p^r$ Elementen. Dieser Körper ist ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$.

Sind K, K' endliche Körper mit $\#K = \#K'$, dann existiert ein Körperisomorphismus $K \cong K'$.

SATZ A.86. Sei $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss des Körpers \mathbb{F}_p . Für jedes $r \in \mathbb{N}$ enthält $\overline{\mathbb{F}}_p$ genau einen Teilkörper \mathbb{F}_{p^r} mit p^r Elementen und es gilt

$$\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{r \geq 1} \mathbb{F}_{p^r}.$$

Für $r, s \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $\mathbb{F}_{p^r} \subseteq \mathbb{F}_{p^s}$, wenn $r \mid s$ gilt.

SATZ A.87. Jede Erweiterung L/K endlicher Körper ist normal und separabel.

A.4.4. Galois-Erweiterungen. Ist L ein Körper, so bezeichnen wir mit $\text{Aut}(L)$ die Gruppe (bezüglich der Verkettung von Abbildungen) aller Körperautomorphismen $L \xrightarrow{\sim} L$. Sei L/K eine Körpererweiterung. Wir bezeichnen mit $\text{Aut}_K(L)$ die Gruppe aller K -Automorphismen von L , also aller Isomorphismen $L \xrightarrow{\sim} L$ von K -Algebren.

DEFINITION A.88. Sei L ein Körper und sei G eine Gruppe, die auf L durch Körperautomorphismen operiert. (Es ist also eine Operation $G \times L \rightarrow L$ gegeben, derart dass das Bild des zugehörige Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Bij}(L)$ in $\text{Aut}(L)$ liegt.)

Dann ist

$$L^G := \{x \in L; gx = x \text{ für alle } g \in G\}$$

ein Teilkörper von L , der sogenannte *Fixkörper* unter der Operation von G . \dashv

Ist L/K eine Körpererweiterung und operiert die Gruppe G auf L durch K -Automorphismen, so ist L^G ein Zwischenkörper der Erweiterung L/K .

Wir definieren nun den Begriff der Galois-Erweiterung, der für den weiteren Verlauf zentral ist. Man kann die Theorie auch auf den Fall unendlicher Erweiterungen verallgemeinern, wir begnügen uns aber in dieser Vorlesung mit dem endlichen Fall und verstehen daher *unter einer Galois-Erweiterung stets eine endliche Körpererweiterung* (mit den zusätzlichen Eigenschaften, die in der folgenden Definition genannt werden).

SATZ A.89. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Es gilt

$$K = L^{\text{Aut}_K(L)}.$$

(ii) Es gibt eine Untergruppe $G \subseteq \text{Aut}(L)$, so dass

$$K = L^G$$

gilt.

(iii) Die Erweiterung L/K ist normal und separabel.

Sind die Bedingungen erfüllt, so heißt die Erweiterung L/K galoissch oder eine Galois-Erweiterung. Wir nennen dann $\text{Gal}(L/K) := \text{Aut}_K(L)$ die Galois-Gruppe der Erweiterung L/K .

Es gilt dann $[L : K] = \# \text{Gal}(L/K)$.

LEMMA A.90. (1) Sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung L/K . Ist L/K galoissch, dann ist auch L/E galoissch.

(2) Sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung L/K . Sind L/K und E/K galoissch, dann ist die Einschränkung von Homomorphismen ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K)$ mit Kern $\text{Gal}(L/E)$.

Für eine Gruppe G bezeichnen wir mit $\text{UG}(G)$ die Menge aller Untergruppen von G . Für eine Körpererweiterung L/K bezeichnen wir mit $\text{ZK}(L/K)$ die Menge aller Zwischenkörper dieser Erweiterung.

THEOREM A.91 (Hauptsatz der Galois-Theorie). Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G . Dann sind die Abbildungen

$$\text{UG}(G) \rightarrow \text{ZK}(L/K), \quad H \mapsto L^H, \quad \text{und} \quad \text{ZK}(L/K) \rightarrow \text{UG}(G), \quad E \mapsto \text{Gal}(L/E),$$

zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen.

Für einen Zwischenkörper E der Erweiterung L/K sind äquivalent:

(i) Die Erweiterung E/K ist normal.

(ii) Die Erweiterung E/K ist galoissch.

(iii) Die Untergruppe $H := \text{Gal}(L/E) \subseteq \text{Gal}(L/K)$ ist ein Normalteiler.

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so induziert die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma|_{L^H}$ einen Isomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L^H/K)$.

KOROLLAR A.92. Jede endliche separable Körpererweiterung besitzt nur endlich viele Zwischenkörper.

DEFINITION A.93. Eine Körpererweiterung L/K heißt abelsch (bzw. zyklisch), wenn sie galoissch mit abelscher (bzw. zyklischer) Galois-Gruppe ist. \dashv

DEFINITION A.94. Sei L/K eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern E und E' . Das Kompositum von E und E' ist der kleinste Teilkörper von L , der E und E' enthält und wird mit $E \cdot E'$ oder einfach mit EE' bezeichnet. \dashv

SATZ A.95. Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit Zwischenkörpern E und E' . Sei $H = \text{Gal}(L/E)$ und $H' = \text{Gal}(L/E')$.

(1) Es gilt $EE' = L^{H \cap H'}$.

(2) Es gilt $E \cap E' = L^{\tilde{H}}$, wobei \tilde{H} die von H und H' in $\text{Gal}(L/K)$ erzeugte Untergruppe bezeichne.

(3) Seien nun die Erweiterungen E/K und E'/K galoissch. Dann ist EE'/K eine Galois-Erweiterung und der Homomorphismus

$$\text{Gal}(EE'/E) \rightarrow \text{Gal}(E'/E \cap E'), \quad \sigma \mapsto \sigma|_{E'},$$

ist bijektiv. Insbesondere ist $[EE' : E]$ ein Teiler von $[E' : K]$.

Aus dem Hauptsatz der Galois-Theorie erhalten wir (mit den Sätzen aus der Gruppentheorie, die wir zu Beginn der Vorlesung bewiesen haben) einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

THEOREM A.96. Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

A.4.5. Die Galois-Gruppe einer Gleichung.

DEFINITION A.97. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K . Dann ist die Erweiterung L/K galoissch, ihre Galois-Gruppe hängt nicht von der Wahl von L ab und heißt auch die *Galois-Gruppe der Gleichung* $f(x) = 0$ (oder die *Galois-Gruppe von* f). \dashv

SATZ A.98. Sei K ein Körper, \bar{K} ein algebraischer Abschluss und $f \in K[X]$ ein separables Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Zerfällungskörper L . Sei $G = \text{Gal}(L/K)$ die Galois-Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ die (nach Voraussetzung paarweise verschiedenen) Nullstellen von f in \bar{K} .

Jedes Element von G induziert dann eine Permutation der α_i , und wir erhalten so einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow S_n$. Insbesondere gilt $\#G \mid n!$.

Das Polynom ist genau dann irreduzibel, wenn G transitiv auf der Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ operiert.

A.5. Anwendungen der Galois-Theorie

A.5.1. Einheitswurzeln und zyklische Erweiterungen.

DEFINITION A.99. Sei K ein Körper. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- (1) Ein Element $\zeta \in K^\times$ heißt eine *n-te Einheitswurzel*, wenn $\zeta^n = 1$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mu_n(K)$ die Menge der *n-ten Einheitswurzeln*. Dies ist eine Untergruppe von K^\times .
- (2) Ein Element $\zeta \in K^\times$ heißt *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn ζ als Element der Gruppe K^\times Ordnung n hat, wenn also $\zeta^n = 1$, aber $\zeta^m \neq 1$ für alle $1 \leq m < n$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mu_n^{\text{prim}}(K)$ die Menge der primitiven *n-ten Einheitswurzeln*.

\dashv

Wir nennen ein Element der multiplikativen Gruppe eines Körpers K eine *Einheitswurzel*, wenn es eine *n-te Einheitswurzel* für irgendein n ist, oder mit anderen Worten, wenn es endliche Ordnung in der Gruppe K^\times hat.

Die *n-ten Einheitswurzeln* in einem Körper K sind gerade die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Es gilt also $\#\mu_n(K) \leq n$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn es eine primitive *n-te Einheitswurzel* gibt. In diesem Fall zerfällt das Polynom $X^n - 1$ in n verschiedene Linearfaktoren. Insbesondere kann es in einem Körper positiver Charakteristik p für $p \mid n$ niemals eine primitive *n-te Einheitswurzel* geben (denn die Ableitung von $X^n - 1$ ist in dieser Situation gleich Null).

Die Gruppe $\mu_n(K)$ ist zyklisch. Gibt es in K eine primitive *n-te Einheitswurzel* ζ , so ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}/n \rightarrow \mu_n(K), \quad i \mapsto \zeta^i,$$

ein Isomorphismus, der sich ein zu einer Bijektion zwischen $(\mathbb{Z}/n)^\times$ und $\mu_n^{\text{prim}}(K)$ einschränkt.

Es gilt $\mu_n(\mathbb{C}) = \{\exp(\frac{2k\pi i}{n}); k = 0, \dots, n-1\}$. Insbesondere ist $\exp(\frac{2\pi i}{n})$ eine primitive n -te Einheitswurzel.

SATZ A.100. Sei K ein Körper, \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K und $\zeta \in \bar{K}$ eine Einheitswurzel. Dann gilt: Die Erweiterung $K(\zeta)/K$ ist eine Galois-Erweiterung.

Sei in der Situation des Satzes ζ eine primitive n -te Einheitswurzel in \bar{K} . Wir betrachten die Abbildung $\psi': \text{Gal}(K(\zeta)/K) \rightarrow \mu_n^{\text{prim}}$, $\psi'(\sigma) = \sigma(\zeta)$. Dies ist eine injektive Abbildung, und durch Verkettung mit der Bijektion $\mu_n^{\text{prim}}(K(\zeta)) \cong (\mathbb{Z}/n)^\times$ erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\psi: \text{Gal}(K(\zeta)/K) \rightarrow (\mathbb{Z}/n)^\times$.

SATZ A.101. Sei K ein Körper, \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K und $\zeta \in \bar{K}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Dann gilt: Die Erweiterung $K(\zeta)/K$ ist eine abelsche Galois-Erweiterung. Die Galois-Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe von $(\mathbb{Z}/n)^\times$.

SATZ A.102. Sei $K = \mathbb{Q}$ und ζ eine primitive n -te Einheitswurzel (in einem algebraischen Abschluss von \mathbb{Q}). Dann gilt $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \#(\mathbb{Z}/n)^\times$ und $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n)^\times$.

SATZ A.103. Seien $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und K ein Körper, der eine primitive n -te Einheitswurzel enthält. Sei L/K eine Körpererweiterung.

- (1) Wenn $L = K(\alpha)$ gilt für ein Element $\alpha \in L$, das Nullstelle eines Polynoms der Form $X^n - c$ mit $c \in K$ ist, dann ist L/K eine zyklische Galois-Erweiterung. Der Grad $d := [L : K]$ ist ein Teiler von n , es gilt $\alpha^d \in K$ und $X^d - \alpha^d$ ist das Minimalpolynom von α über K .
- (2) Wenn die Erweiterung L/K zyklisch vom Grad n ist, dann existiert $\alpha \in L$, so dass $L = K(\alpha)$ ist und das Minimalpolynom von α über K die Form $\text{minpol}_{\alpha, K} = X^n - c$ für ein $c \in K$ hat.

A.5.2. Auflöbarkeit von Gleichungen durch Radikale. Um die Diskussion etwas zu vereinfachen, betrachten wir in diesem Abschnitt nur Körper der Charakteristik 0. Um die Ergebnisse in der »richtigen« Art und Weise auf Körper positiver Charakteristik zu übertragen, ist zu berücksichtigen, dass es über diesen im allgemeinen auch zyklische Erweiterungen gibt, für die kein primitives Element mit Minimalpolynom der Form $X^n - c$ existiert (vergleiche Satz A.103, der diese Fälle nicht abdeckt, weil es niemals eine primitive n -te Einheitswurzel gibt, wenn n ein Vielfaches der Charakteristik ist).

DEFINITION A.104. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung.

- (1) Wir sagen, die Körpererweiterung L/K sei *auflösbar durch Radikale*, wenn eine Kette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r$$

endlicher Körpererweiterungen mit $L \subseteq K_r$ existiert, so dass jede der Erweiterungen K_{i+1}/K_i von einer der folgenden Formen ist:

- K_{i+1} entsteht aus K_i durch Adjunktion einer Einheitswurzel,
 - $K_{i+1} = K_i(\alpha)$ für ein Element α aus K_{i+1} , so dass eine positive Potenz von α in K_i liegt.
- (2) Wir sagen, die Körpererweiterung L/K sei *auflösbar*, wenn ein Erweiterungskörper E von L existiert, so dass E/K eine Galois-Erweiterung mit auflösbarer Galois-Gruppe ist.
 - (3) Ist $f \in K[X]$, so sagen wir die Gleichung $f(x) = 0$ (oder: das Polynom f) sei *auflösbar durch Radikale* bzw. *auflösbar*, wenn der Zerfällungskörper von f die entsprechende Eigenschaft hat.

LEMMA A.105. (1) Eine Erweiterung L/K ist genau dann auflösbar durch Radikale, wenn die normale Hülle von L über K diese Eigenschaft hat.

(2) Eine Erweiterung L/K ist genau dann auflösbar, wenn die normale Hülle von L über K eine Galois-Erweiterung mit auflösbarer Galois-Gruppe ist.

(3) Die Eigenschaften auflösbar durch Radikale und auflösbar verhalten sich transitiv in einem Turm $K \subset L \subset M$ von Körpererweiterungen.

SATZ A.106. Eine Körpererweiterung ist genau dann auflösbar durch Radikale, wenn sie auflösbar ist.

KOROLLAR A.107. Es gibt Gleichungen (zum Beispiel vom Grad 5 über \mathbb{Q}), die nicht durch Radikale auflösbar sind.

KOROLLAR A.108. Jede Gleichung vom Grad ≤ 4 ist durch Radikale auflösbar.

A.5.3. Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

DEFINITION A.109. Die Teilmenge $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ der (mit Zirkel und Lineal) konstruierbaren komplexen Zahlen ist die kleinste Teilmenge von \mathbb{C} , die die folgenden Eigenschaften hat:

- $0, 1 \in \mathbb{K}$,
- für je zwei unterschiedliche Geraden, die durch (mindestens) zwei Punkte von \mathbb{K} gehen, liegt auch deren Schnittpunkt in \mathbb{K} ,
- für jede Gerade, die durch (mindestens) zwei Punkte von \mathbb{K} geht, und jeden Kreis, dessen Mittelpunkt in \mathbb{K} liegt, und so dass der Radius gleich dem Abstand zweier Punkte in \mathbb{K} ist, liegen auch die Schnittpunkte der Geraden und des Kreises in \mathbb{K} ,
- für je zwei unterschiedliche Kreise, deren Mittelpunkte in \mathbb{K} liegen, und so dass die Radien jeweils gleich dem Abstand zweier Punkte in \mathbb{K} sind, liegen auch die Schnittpunkte der Kreise in \mathbb{K} .

—

SATZ A.110. (1) Die Menge \mathbb{K} ist ein Teilkörper des Körpers der komplexen Zahlen.

(2) Die Erweiterung \mathbb{K}/\mathbb{Q} ist algebraisch.

(3) Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\pm\sqrt{\alpha} \in \mathbb{K}$.

SATZ A.111. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es gilt $\alpha \in \mathbb{K}$, d.h. α ist ausgehend von 0 und 1 konstruierbar mit Zirkel und Lineal.

(ii) Es gibt eine endliche Kette

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r$$

von Körpererweiterungen, so dass $[K_i : K_{i-1}] = 2$ für alle $i = 1, \dots, r$ gilt und $\alpha \in K_r$ ist.

(iii) Es gibt eine Galois-Erweiterung K/\mathbb{Q} mit $\alpha \in K$, deren Grad eine Potenz von 2 ist.

KOROLLAR A.112. (1) Es gilt $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{K}$, d.h. die »Verdoppelung des Würfels« ist nicht möglich.

(2) Aus dem Satz von Lindemann, dass π transzendent über \mathbb{Q} ist, folgt, dass $\pi \notin \mathbb{K}$ gilt, also dass die »Quadratur des Kreises« nicht möglich ist.

THEOREM A.113. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent:

(i) Das regelmäßige n -Eck ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal (d.h. $\exp(\frac{2\pi i}{n}) \in \mathbb{K}$).

(ii) Die Zahl $\varphi(n)$ ist eine Potenz von 2 (wobei φ die Eulersche φ -Funktion bezeichnet, d.h. $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und $n - 1$).

DEFINITION A.114. Eine Primzahl der Form $2^k + 1$ heißt Fermatsche Primzahl. Es ist dann notwendigerweise k selbst eine Potenz von 2. Wir schreiben $F_r = 2^{2^r} + 1$. —

KOROLLAR A.II5. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent:

- (i) Das regelmäßige n -Eck ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal (d.h. $\exp(\frac{2\pi i}{n}) \in \mathbb{K}$).
- (ii) Die Zahl n hat die Form $2^l p_1 \cdots p_l$ mit $r, l \geq 0$ und mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen p_i .

A.5.4. Das quadratische Reziprozitätsgesetz.

SATZ A.II6. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei $\zeta_p \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive p -te Einheitswurzel. Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Zwischenkörper E mit $[E : \mathbb{Q}] = 2$, und zwar ist dies der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$ mit

$$p^* = \begin{cases} p & \text{wenn } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -p & \text{wenn } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

LEMMA A.II7. Sei p eine ungerade Primzahl. Ein Element $x \in \mathbb{F}_p^\times$ ist genau dann ein Quadrat in \mathbb{F}_p^\times , wenn $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ gilt.

Dieses Lemma motiviert die folgende Definition.

DEFINITION A.II8. Sei p eine ungerade Primzahl und $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Wir definieren das Legendre-Symbol durch

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in (\mathbb{F}_p^\times)^2, \\ -1 & \text{wenn } x \in \mathbb{F}_p^\times \setminus (\mathbb{F}_p^\times)^2. \end{cases}$$

(Der Wert des Legendre-Symbols soll per Definition in \mathbb{Z} liegen, d.h. 1 und -1 werden hier als ganze Zahlen, nicht als Elemente eines endlichen Körpers, betrachtet.)

Für ganze Zahlen x , die zu p teilerfremd sind, definieren wir das Legendre-Symbol, indem wir die obigen Definition auf die Restklasse von x in \mathbb{F}_p anwenden. \dashv

THEOREM A.II9 (Quadratisches Reziprozitätsgesetz). Seien $p \neq q$ ungerade Primzahlen. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$$

THEOREM A.I20 (Ergänzungssätze zum quadratischen Reziprozitätsgesetz). Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gilt

$$(1) \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$(2) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Bemerkungen zur Literatur *

B.1. Deutsche Lehrbücher und Vorlesungsskripte

Es gibt *sehr viele* Bücher und Skripte zur Algebra-Vorlesung. Hier eine kleine Auswahl von Texten, die ich alle empfehlen kann. Der Standardstoff (Gruppen, Ringe, Körper und Körpererweiterungen und Galois-Theorie) wird in allen dieser Bücher und Skripte behandelt, und meist noch einiges mehr. Jedes hat einen eigenen Ansatz oder jedenfalls eigene Schwerpunkte und seinen eigenen Stil – am besten, Sie schauen selbst einmal, womit Sie am besten zurecht kommen.

S. Bosch, *Algebra*, 9. Aufl., Springer 2020.

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61649-9>

Das Buch von Bosch ist inzwischen ein Standardwerk. Es ist gut organisiert, enthält im Haupttext alles Wesentliche, aber nicht viel »Drumherum«. Dafür gibt es mehrere Ergänzungsabschnitte sowie Einführungen zum Buch und den einzelnen Kapiteln.

J. C. Jantzen, J. Schwermer, *Algebra*, 2. Aufl., Springer 2014.

<https://doi.org/10.1007/978-3-642-40533-4>

Jantzen und Schwermer behandeln neben den Themen der Vorlesung auch noch einiges andere, insbesondere aus der Theorie der Moduln über (nicht notwendig kommutativen) Ringen.

C. Löh, *Algebra*, Vorlesungsskript Univ. Regensburg, WS 2017/18.

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf

In diesem Skript finden Sie insbesondere auch viele Anregungen und motivierende Bemerkungen, die Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik und anderen Disziplinen herstellen.

F. Lorenz, *Algebra I*, 4. Aufl., Springer Spektrum 2007.

Im Buch von Lorenz wird der Stoff in etwas anderer Reihenfolge präsentiert als es oft üblich ist (und als wir es in der Vorlesung machen). Statt zunächst die Gruppentheorie zu entwickeln, stellt Lorenz als Motivation eine Diskussion der Konstruierbarkeitsprobleme an den Anfang und entwickelt daran anknüpfend den Begriff der algebraischen Körpererweiterung.

W. Soergel, *Algebra und Zahlentheorie mit grundlegenden Abschnitten aus der Linearen Algebra*, Vorlesungsskript Univ. Freiburg,

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXALMG.pdf>

Ein weiteres Vorlesungsskript, das mir sehr gut gefällt. Hier werden an vielen Stellen interessante Hintergrundinformationen gegeben, zum Beispiel, wie eine Begriffswahl zu erklären ist (oder warum sie vielleicht ungünstig ist und nur aus historischen Gründen beibehalten wird), aber auch, wie man über gewisse Definitionen denken sollte, usw.

B.2. Englische Lehrbücher und Vorlesungsskripte

Noch viel mehr Bücher (und Skripte) zur Algebra gibt es natürlich auf Englisch. Gehen Sie einmal in die Bibliothek und schauen in ein oder zwei davon herein – und sei es nur, um sich zu überzeugen, dass man mathematische Texte auf Englisch genauso leicht (oder oft: so schwer) verstehen kann, wie auf Deutsch.

M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall 1991.

D. Dummit, R. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd ed., Wiley 2003.

T. Hungerford, *Algebra*, Springer Graduate Texts in Math. **73**, 1974.

J. Milne, *Fields and Galois Theory*, 2021

<https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf>

S. Lang, *Algebra*, Revised Third Ed., Springer Graduate Texts in Math. **211**, 2002. (Oder eine frühere Auflage.)

H. W. Lenstra jr., *Groups, rings, and fields*,

<http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/topics.pdf>

E. Vinberg, *A Course in Algebra*, Graduate Studies in Math. **56**, AMS 2003.

B.3. Klassiker, Sonstige

B. L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, verschiedene Auflagen seit 1930 (zunächst unter dem Titel *Moderne Algebra*)

Ein einflussreiches Lehrbuch der Algebra, das schon sehr nahe an der Darstellung ist, die zum Beispiel in dieser Vorlesung gegeben wird. Im Vergleich zu älteren Lehrbüchern (zum Beispiel dem von H. Weber) tritt der Begriff der Gleichung gegenüber dem der Körpererweiterung in den Hintergrund.

E. Artin, *Galois theory*, Dover

<https://projecteuclid.org/ebooks/notre-dame-mathematical-lectures/Galois-Theory/toc/ndml/1175197041>

Ein kurzes Büchlein, in dem die Galois-Theorie dargestellt wird, und zwar werden hier besonders Methoden der Linearen Algebra verwendet. Insbesondere kann Artin damit den Hauptsatz der Algebra beweisen, ohne den Satz vom primitiven Element verwenden zu müssen. Der Begriff des Quotienten eines Rings nach einem Ideal wird nicht benutzt; was man dadurch spart, ihn nicht einführen zu müssen, verliert man aber zum Beispiel bei der Diskussion der Kronecker-Konstruktion (die dort mehrere Seiten in Anspruch nimmt, S. 26 ff.)

Achtung: Was bei Artin *normal* heißt, heißt bei uns *galoissch*.

N. Bourbaki, *Algèbre* und *Algèbre commutative*.

Nicolas Bourbaki¹ ist das Pseudonym einer Gruppe französischer Mathematiker, die mit den unter diesem Namen veröffentlichten Büchern einen großen Teil der Grundlagen Mathematik, insbesondere im Bereich der Algebra, im berühmt-berüchtigten »Bourbaki-Stil« – extrem rigoros und formal(istisch) – neu aufgeschrieben hat. Die Texte wurden üblicherweise in vielen Durchgängen intensiv und kontrovers diskutiert, bis schließlich eine endgültige Fassung erreicht wurde.

Stacks Project²

Das Stacks-Projekt ist eine Online-Enzyklopädie, in der die Theorie der algebraischen Stacks (ein Begriff aus der algebraischen Geometrie) einschließlich aller Voraussetzungen dargestellt werden soll. Momentaner Zwischenstand der pdf-Datei (Ende September 2021): 7310 Seiten. Das Projekt wurde initiiert und wird betreut von **Johan de Jong**³. Das Kapitel über Körper und Körpererweiterungen befindet sich hier: <https://stacks.math.columbia.edu/tag/09FA>

¹https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki

²<https://stacks.math.columbia.edu/>

³https://de.wikipedia.org/wiki/Aise_Johan_de_Jong

Literaturverzeichnis

- [Bo-A] S. Bosch, *Algebra*, 9. Aufl., Springer 2020.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61649-9>
- [Bu] P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, 6. Aufl., Springer 2008.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76491-5>
- [JS] J. C. Jantzen, J. Schwermer, *Algebra*, 2. Aufl., Springer 2014.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-40533-4>
- [Lö] C. Löh, *Algebra*, Vorlesungsskript Univ. Regensburg, WS 2017/18.
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf
- [Lo] F. Lorenz, *Algebra I*, 4. Aufl., Springer Spektrum 2007.
- [Soe] W. Soergel, *Algebra und Zahlentheorie mit grundlegenden Abschnitten aus der Linearen Algebra*,
<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXALMG.pdf>

Index

- Ableitung, 47, 81
- Algebra
 - über einem Ring, 46, 80
 - algebraisch, 52, 83
 - Algebraischer Abschluss, 55, 84
 - Alternierende Gruppe, 28, 77
 - auflösbar, 30, 77
 - Auflösbar durch Radikale, 7
- Bahn
 - (Gruppenwirkung), 20, 75
- Bahngleichung, 22, 76
- Charakter, 67
- Darstellung, 42
- Einfache Gruppe, 33
- Einfache Gruppe, 30
- Eisenstein
 - Irreduzibilitätskriterium, 50, 82
- endlich erzeugt
 - Körpererweiterung, 52, 83
- Eulersche φ -Funktion, 25
- Frobenius-Homomorphismus, 44, 79
- Galois-Erweiterung, 62, 88
- Galois-Gruppe, 62, 88
 - einer Gleichung, 89
- galoissch, 62, 88
- Grad
 - einer Körpererweiterung, 52, 83
- Gruppe
 - auflösbar, 30, 77
 - einfach, 30, 33
 - symmetrische, 12
 - zyklisch, 24, 76
- Gruppenoperation, 20, 75
- Gruppenwirkung, 20, 75
 - transitiv, 24, 76
- Homomorphiesatz
 - für Gruppen, 18
- Homomorphismus
 - R -Algebren, 46, 80
- Ideal
 - maximal, 44, 79
- Index, 16
- inseparabel, 60, 86
- Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein, 50, 82
- Isotropiegruppe, 20
- Kanonische Projektion, 18
- Klassengleichung, 23, 76
- Kleinsche Vierergruppe, 14
- Kommutator, 30, 77
- Kommutatoruntergruppe, 30, 77
- Kompositionsreihe, 33
- Konjugationsklasse, 22, 75
- konstruierbar, 57, 91
- Körper
 - perfekt, 61, 86
 - vollkommen, 61, 86
- Körpererweiterung, 5
 - algebraisch, 52, 83
 - endlich, 52, 83
 - endlich erzeugt, 52, 83
 - galoissch, 62, 88
 - Grad, 52, 83
 - normal, 59, 85
 - rein inseparabel, 60, 86
 - separabel, 60, 86
- Legendre-Symbol, 71, 92
- Linksnebenklasse, 15
- Maximales Ideal, 44, 79
- Minimalpolynom, 52, 83
- Monster, 36
- Nebenklasse, 15
- Norm, 67
- normal, 59, 85
- Normale Hülle, 60, 85
- Normalisator, 22
- Normalreihe, 30
- Normalteiler, 17
- Operation, 20, 75
- Orbit, 20, 75
- Ordnung
 - (Nullstelle), 47, 81
 - einer Gruppe, 16
 - eines Gruppenelements, 16
- perfekt, 61, 86
- p -Gruppe, 37, 78
- Polynom
 - primitiv, 49, 82

Polynomring, 47, 81
Primideal, 44, 79
primitiv, 49, 82
Primitivwurzel, 27

Quaternionengruppe, 15
Quotient
 Gruppe, 18

R -Algebra, 46, 80
Reduktionskriterium, 49, 82
rein inseparabel, 60, 86
Restklasse, 15

separabel, 60, 86
Separabilitätsgrad, 61, 86
 S_n , 12
Stabilisator, 20, 75
Standgruppe, 20
Sylow-Sätze, 38
Sylow-Untergruppe, 37, 78
Symmetrische Gruppe, 12

transitiv
 Gruppenwirkung, 24, 76

Vielfachheit
 (Nullstelle), 47, 81
vollkommen, 61, 86

Wirkung, 20, 75

Zentralisator, 22, 75
Zentrum, 22, 76
Zerfallungskörper, 55, 59, 85
 Z_S , 22, 75
Zwischenkörper, 51, 82
zyklisch, 24, 76